# Visual appearance of wireframe objects in special relativity

Thomas Müller*, Sebastian Boblest†

**概要**

運動する物体の特殊相対性理論的な見え方は, 物体の表面あるいは少なくともそのワイヤフレームモデルを点の集団として表現することで簡単に構築することができる．各点の見かけの位置は, 運動物体の世界線と観察者の後方の光円錐とを交差させることで求められる．この論文では, 一般的なパラメータ設定 (配置) をした場合の, 点の見かけの位置とより複雑な幾何学的物体の幾つかの見え方の完全な導出を提示する．我々の結果は python と asymptote で実装し, それらのツールは本論文の図を作成するスクリプトの生成に用いた．これらのスクリプトは, 特殊相対性理論の学部課程に直接適用できるし, または, より複雑な状況を研究するための学生プロジェクトの基礎としても利用できるであろう．

## 1 導入 (Introduction)

観察者に対し光速に近い相対速度で運動する物体の奇妙な見え方は, アインシュタインの特殊相対性理論 [1] の不可解な予測の一つであり、1924 年に Lampa [2] によってすでに研究されていた。不幸なことに, 運動する棒の見かけの形状に関する Lampa の議論は長い間認識されておらず, 有名な物理学者 Gamow でさえ, 彼の著書"Mr.Tompkins in Wonderland"(1940 年版)[3] の中で, 移動する車輪の見え方について誤った結論を出している．1959 年に Terrell [4] は, ローレンツ収縮が観察者には見えないことを指摘したが, これは Weinstein [5] が同様に追求した方向であり, 一方, Penrose [6] は, 相対論的に動く球体は常に円形の輪郭を持っていることを証明したが, これは Boas [7] によって再び検討された問題である．しかし, 相対論

* Visualisierungsinstitut der Universität Stuttgart (VISUS) Allmandring 19, 70569 Stuttgart, Germany. E-mail: Thomas.Mueller@vis.uni-stuttgart.de

† Visualisierungsinstitut der Universität Stuttgart (VISUS) Allmandring 19, 70569 Stuttgart, Germany. E-mail: Sebastian.Boblest@vis.uni-stuttgart.de

的に動く物体の見え方は, 計算だけでは直感的な理解が難しい特殊相対性理論の結果の一つである．相対論的可視化の分野は, 数学的な結果と人間の想像力のギャップを埋めるものである．

コンピュータパワーの急速な向上と非常に強力なグラフィックス=ハードウェアの出現により, 特殊相対論および一般相対論的なシナリオ (出来事の予想される展開) の高品質な画像を生成することを可能とする幾つかの洗練された技術の開発が可能になった．

これらの方法の中で最も自然な方法は「相対論的レイトレーシング」(relativistic ray tracing) である．そこでは, 光の物理的な伝搬を逆にし, そして光の速度が有限であることを考慮に入れている．(とりわけ 例えば, Hsiung と Dunn [8], Weiskopf [9], または Müller [10] を参照せよ)．このレンダリング技術は, 現代のコンピュータでも一般的に非常に時間が掛かるため, 相対論の視覚的効果を示す対話的なシミュレーションには使用されない．人気のある代替方法は, 物体のポリゴンメッシュを観察者の静止系へ変換することである [11]．しかし、この「ポリゴンレンダリング」(polygon rendering) 技術では, 頂点のみが変換され, 接続する辺は直線のままであるため, 画像の不自然さ (artefact) が発生する．しかし, レイトレーシングとポリゴンレンダリングを組み合わせることで, それぞれの欠点を回避することが出来る．そのためには, 三角形メッシュに限定し, グラフィックス処理装置（GPU）の高い並列性とグラフィックス=パイプラインの自由なプログラミング性を利用する必要がある．この「局所的レイトレーシング」(local ray tracing) 手法の詳細は、Müller ら [12] に記載されている．特殊相対性理論のための可視化手法の最近の調査は Weiskopf [13] によって行われている．包括的な概要に興味のある読者はその論文を参照して欲しい．

特殊相対性理論で最初に採用された可視化技術は, ワイヤーフレームモデルの見かけの形状を考慮したものである．この手法を用いた研究は様々な著者によって発表されている．Scott と Viner [14] は平面グリッドと長方形の箱の外観を検討し, Scott と van Driel [15] は特に観察者の近くを通過する球体の外観を研究したが, 彼らが見たシナリオの完全な説明は与えていない．Hickey [16] は相対論的に動く立方体の二次元的な見え方を考察し, Suffern [17] は相対論的に動く球体の輪郭を再考し, 彼は観察者に向けられた運動に焦点を当てた．相対論的な速度で見かけの歪み効果を示す最初のインタラクティブなコンピュータ・シミュレーションの一つは, Taylor による 「Visual Appearance」 [18] である．彼もまたワイヤーフレームオブジェクトを使用しているが, 可視化がどのように達成されるかについての内部は何も与えておらず, 彼のプログラムにはポリゴンレンダリングで画像の不自然さが起こるようだ．

この論文でも, 物体のワイヤーフレームに焦点を当てている．これまでの研究とは対照的に, 我々はローレンツ変換と光速度の有限性に従って頂点間の完全な辺を変換することにより, 直線が一般的にどのように曲がって見えるかを適切に可視化できるだけでなく, 見かけの形状を

強調するための奥行き情報も含めることが出来た．他の方法では, 特にテクスチャや単純なシェーディング技術を使用することで, はるかに質の高い画像を簡単に作成できることは明らかだが, ワイヤーフレームの方法は教授法的に (didactically) 非常に強力である．現代のコンピュータでは, このような可視化は完全にインタラクティブに作成することが出来る．そして学生は独自の風景を作成し, その場合の特殊相対論的効果を研究することが出来る．この論文では, 線と球体の見え方の一般的な導出を与える．それらの物体と観測者は, 基準座標系内の何処に位置してもよい．そして 2 座標系間の空間的距離と相対速度の設定も任意とする．ただし, 2 座標系の座標軸は揃っているという制限が付く．これにより, 一方では複雑なシーンを構築でき, 他方では同じ風景を異なる観察者がどのように知覚するかを研究することが出来る．

私たちの結果は asymptote と Python のスクリプトで実行したが, そのスクリプトはこの論文中の図を作成するのに用いている．しかし, より重要なことは, 特殊相対性理論のコースや他のシーンを構築して研究する学生のプロジェクトでそのスクリプトが使えることである．スクリプトは, http://go.visus.uni-stuttgart.de/srwireframe からダウンロードできる．python スクリプトを使えば, 幾つかのシーンはアニメーション化することも可能である．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では, 今後の計算の基礎となるポアンカレ変換について概説する．第 3 節では, 単点, 棒, そして球体の見え方に対するパラメータ化された方程式の詳細な数学的導出を行なう．第 4 節では, いくつかの例を詳述し, 我々のワイヤーフレームモデルとそれに対応する 4 次元レイトレーシングから得られたレンダリング画像とを比較する．付録 A では, 演習の形でいくつかの例を挙げている．

## 2 ポアンカレ変換 (Poincaré Transformation)

2 つの基準系 $S$ と $S'$ を考え, それらが備えている座標系を各々 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$ そして $x^{'\mu} = (x^{'0}, x^{'1}, x^{'2}, x^{'3}) = (ct', \vec{x'})$ とする．$S'$ の原点が $S$ の原点に対して $\vec{a}$ に位置するとき, 両方の基準系の時計は $x^0 = x^{'0} = 0$ に同期される (図 1 を参照)．両系の座標軸は互いに整列しており, 系 $S'$ は系 $S$ に対して一定速度 $\vec{v} = \beta \boldsymbol{n}$ で運動している．この配置 (setup) を, 回転の無い特殊相対論での「標準配置 (standard configuration)」と呼ぶことにしよう． 我々の観測者は系 $S$ に静止しており, 他方, システム S′ は我々の風景のための静止系である (観測対象物は系 $S'$ に乗っている).

両系の間のポアンカレ変換は次で定義される：

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^{'\nu} + a^\mu, \tag{1}$$

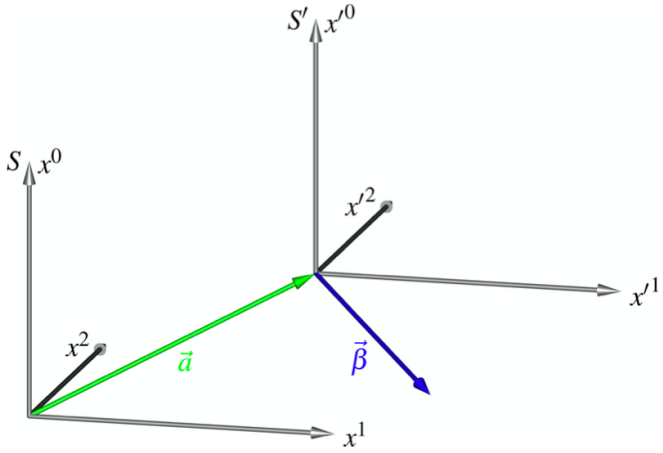



図 1　基準座標系 $S'$ は系 $S$ に対して一定速度 $\vec{\beta}$ で動いている．$S'$ が $S$ から見て $\vec{a}$ に位置するとき, 両系を同期させて $x^0 = x'^0 = 0$ とし, そして座標軸の向きは揃える．

そしてローレンツ行列 $\Lambda^\mu_\nu$ は次で与えられる：

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Lambda^0{}_i = \gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_0 = \gamma\beta^i, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j, \tag{2}$$

ただし $\beta_i\beta^i = \beta^i\beta^i = \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} < 1$ そして $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta_i\beta^i}$ である (例えば Misner et al.[20] を参照のこと)．また $\delta^i_j$ はクロネッカーのデルタである．そして, 同じ項に 2 回現れる添字について合計するというアインシュタインの和の規約も用いている．4-変位ベクトルは $a^\mu = (0, \vec{a})$ の意と解する．これ以降では, ギリシャ文字の添字は 0 から 3 までとし 0 番目の座標は時間を表わすとする．また, ラテン文字の添字は 1 から 3 までとする．

ローレンツ行列の逆 $\bar{\Lambda} = \Lambda^{-1}$ は式 (2) で $\beta \to -\beta$ としたものとなる：

$$\bar{\Lambda}^0{}_0 = \gamma, \quad \bar{\Lambda}^0{}_i = -\gamma\beta_i, \quad \bar{\Lambda}^i{}_0 = -\gamma\beta^i, \quad \bar{\Lambda}^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j, \tag{3}$$

$$\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma n^1 & -\beta\gamma n^2 & -\beta\gamma n^3 \\ -\beta\gamma n^1 & (\gamma-1)n^1n^1+1 & (\gamma-1)n^1n^2 & (\gamma-1)n^1n^3 \\ -\beta\gamma n^2 & (\gamma-1)n^2n^1 & (\gamma-1)n^2n^2+1 & (\gamma-1)n^2n^3 \\ -\beta\gamma n^3 & (\gamma-1)n^3n^1 & (\gamma-1)n^3n^2 & (\gamma-1)n^3n^3+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{where} \quad n^1 = \cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \; n^2 = \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \; n^3 = \cos\gamma = \frac{v_z}{v}, \; v = \left|\vec{v}\right|, \; \beta = \frac{v}{c}$$

これに相当するポアンカレ変換は $x'^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu(x^\nu - a^\nu)$ となる．

( 注意 ) Misner et al. では「幾何単位」(geometrized units) を用いている．それは, 万有引力定数 $G$ と光速度 $c$ を基本単位として構成する自然単位であり, 万有引力定数 $G = 1$, 光速度 $c = 1$, そしてボルツマン定数 $k = 1$ とする．また, 式 (2) と式 (3) の表現は一見 Misner と違うようだが $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 即ち $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$ であることから次のようにして一致した表現であることが確認できる：

$$\frac{\gamma^2}{\gamma+1} = \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{\gamma^2-1} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{1-\beta^2}{\beta^2}(\gamma-1) = \frac{\gamma-1}{\beta^2}, \quad \beta n^i = \frac{v}{c}\cdot\frac{v^i}{v} = \frac{v^i}{c} \equiv \beta_i$$

$$\text{therefore} \quad \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j = \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta_j = \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta n^i \beta n_j = (\gamma-1)n^i n_j$$

# 3 物体の見かけの眺め (Apparent view of an object)

光の速度が有限であるために, 我々が見る運動物体は「実際の位置のものではなく, 今観測している光を送った場所でのもの」となる.

## 3.1 点の見かけの位置 (Apparent position of a point)

最も簡単な場合は, 物体が単なる点 $P$ のときである．その点 $P$ の見かけの位置は、$S$ 上で静止している観察者の後方にある光円錐と点 $P$ の世界線 $(x_p^0, \vec{x}_p = \vec{x}_p(x_p^0))$ とを交差させることによって決定することができる．(両者が交差する位置では, 両者間の世界距離はゼロとなっているはずである．今後は, 点を表わすインデックス $p$ を省略する．)

$$0 = -\left(x^0 - x^0_{\rm obs}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i - x^i_{\rm obs}\right)^2 \tag{4}$$

「点 $P$ は運動している座標系 $S'$ 上で静止している」とするならば, $\vec{x}^{'} = \text{const} = \vec{x}^{'}_p$ である．ポアンカレ変換式 (1) によって, この世界線を $S$ に変換しなければならない．すると式 (4) は次となる：

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\Lambda^0{}_\mu x^{'\nu} - x^0_{\rm obs}\right)^2 + \delta_{ij}\left(\Lambda^i{}_\nu x^{'\nu} + a^i - x^i_{\rm obs}\right)\left(\Lambda^j{}_\mu x^{'\mu} + a^j - x^j_{\rm obs}\right) \qquad (5)\\ &= -\left(\Lambda^0{}_0 x^{'0} + \Lambda^0{}_n x^{'n} - x^0_{\rm obs}\right)^2 \\ &\quad + \delta_{ij}\left(\Lambda^i{}_0 x^{'0} + \Lambda^i{}_n x^{'n} + a^i - x^i_{\rm obs}\right)\left(\Lambda^j{}_0 x^{'0} + \Lambda^j{}_m x^{'m} + a^j - x^j_{\rm obs}\right) \qquad (6)\end{aligned}$$

このとき, 未知の量は $x'^0$ だけである．それは光が時刻 $x^0_{\rm obs}$ に観測者に到着するように点 $P$ で光が放出されるべき時刻である．$x'^0$ についての 2 次方程式 (6) を解き, そして次の省略形

を用いる：

$$\rho = \gamma\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}'\right) - x^0_{\rm obs}, \quad \vec{\eta} = \vec{x}' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}'\right)\vec{\beta} + \vec{a} - \vec{x}_{\rm obs}, \tag{7}$$

$$\omega_0^2 = \gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho\right)^2 - \rho^2 + \vec{\eta}\cdot\vec{\eta}, \tag{8}$$

これらの量と $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$ を用いると, 式 (5) または式 (6) は

$$(\gamma x'^0 + \rho)^2 = (\gamma\vec{\beta}x'^0 + \vec{\eta})^2, \quad \rightarrow \quad x_0'^2 - 2\gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho)x'^0 + \rho^2 - \vec{\eta}\cdot\vec{\eta} = 0$$

となる．よって 2 次方程式の根と係数の関係式から,

$$x'^0 = \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho) \pm \sqrt{\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta})^2 - \rho^2 + \vec{\eta}\cdot\vec{\eta}} = \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho) \pm \omega_0$$

この結果を式 (1) のポアンカレ変換式に代入すると,

$$\begin{aligned} x^i &= \Lambda^i{}_0 x'^0 + \Lambda^i{}_k x'^k + a^i = \gamma\beta^i x'^0 + \delta^i{}_k x'^k + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_k x'^k + a^i \\ &= x'^i + \left(\gamma x'^0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{x}'\right)\beta^i + a^i \end{aligned}$$

従って, 最終的な結果として次を得る：

$$x'^0 = \gamma\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho\right) - \omega_0, \tag{9}$$

$$\vec{x} = \vec{x}' + \left(\gamma x'^0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{x}'\right)\vec{\beta} + \vec{a} = \gamma x'^0\vec{\beta} + \vec{\eta} + \vec{x}_{\rm obs}. \tag{10}$$

式中のスカラー積は通常通りであり, ベクトル成分同志の積を全ての成分について足し合わせたものである．例えば, $\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} = \beta^1\eta^1 + \beta^2\eta^2 + \beta^3\eta^3$ である．しかしながら, スカラー積の各々は基準座標系 $S$ か $S'$ のいずれか一方だけと解釈してはならない．従って, スカラー積がゼロ, すなわち $\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} = 0$ となる状況を解釈する際には注意しなければならない．一般的に, その際の両ベクトルは「直交している」と解釈することは出来ない．なぜなら, ある場合にはそれらが $S$ か $S'$ で測定されたベクトルの混合だからである．

もし点 $P$ と観測者が各々の基準系の原点に居る, すなわち $\vec{x}' = \vec{0} = \vec{x}_{\rm obs}$ かつ $\vec{a} = \vec{0}$ であるならば, 式 (9) と式 (10) はかなり簡単になる．このときは,

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\rm obs} = \vec{0}, \quad \vec{a} = \vec{0}, \ \rightarrow \ \rho = -x^0_{\rm obs}, \quad \vec{\eta} = 0, \quad \omega_0^2 = (\gamma^2-1)x^{0\,2}_{\rm obs} = \beta^2\gamma^2 x^{0\,2}_{\rm obs}$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= \gamma x^0_{\rm obs} - \omega_0 = \gamma x^0_{\rm obs} \pm \gamma\beta x^0_{\rm obs} \\
&= \gamma(1\pm\beta)x^0_{\rm obs} = \frac{1\pm\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^0_{\rm obs} = \sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}}x^0_{\rm obs} \equiv D_\beta x^0_{\rm obs}, \\
\vec{x} &= \gamma x'^0\vec{\beta}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$x^0_{\rm obs} < 0$ の間は, 点は観測者に近づいているので, 因子 $D_\beta$ の根号中では上側の符号を, そして点 $P$ が観測者を通り過ぎた後では下側の符号をそれぞれ用いなければならない．$D_\beta$ は「**ドップラー因子**」(*Doppler factor*) と呼ばれる．光のスペクトルを考慮に入れるならば, 青色変位と赤色変位は $D_\beta$ に起因する．

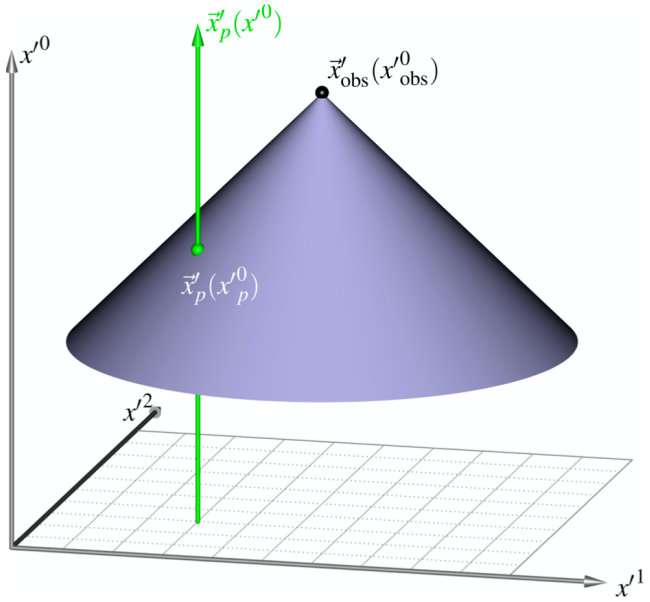



図 2　点 $P$ の世界線と観測者の過去光円錐の交点が事象 $\vec{x}'_p(x'^0_p)$ を決定する．ただし点 $P$ は, 光を観測者が時刻 $x'^0_{\rm obs}$ に視るように放射されなければならない．

我々は光円錐の交差を $S'$ 座標系内で遂行することも出来るであろう．その場合, 観測時刻 $x^0_{\rm obs}$ に於ける観測者の現在位置は, ポアンカレ変換の逆変換：$x'^\mu_{\rm obs} = (\mathbf{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu(x^\nu_{\rm obs} - a^\nu)$ から導かれる (図 2 を参照のこと)．すると, 光円錐の交差は次となる：

$$
0 = -(x'^0 - x'^0_{\rm obs})^2 + \sum_{i=1}^{3}(x'^i - x'^i_{\rm obs})^2 \tag{12}
$$

点 $P$ が静止している場合は, すぐに次の結果が求まる:

$$x'^0 = x'^0_{\rm obs} - \Delta(\vec{x}', \vec{x}'_{\rm obs}), \quad \Delta(\vec{x}', \vec{x}'_{\rm obs}) \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x'^i - x'^i_{\rm obs})^2} \tag{13}$$

そして見かけの位置 $\vec{x}$ は式 (1) による逆変換から求まる．この第 2 の解法の方がずっと簡単のように思える．しかしながら, その場合にはポアンカレ変換を 2 回行う必要がある．

すぐ上の変換を用いると, 相対論的に動いている物体の表面を点群 (cloud of points) で表現することで, その視覚的な形状 (virtual shape) を決めることが出来るであろう．その結果として得られる見かけの位置は「写真オブジェクト」(photo-object) を構成する．それは物体表面から放出された光が観測者に同じ時刻に到達する全ての点の集合である．この写真オブジェクトは観測者またはカメラが「見る映像」である．しかしながら, 観測者の知覚 (perception) は見るものとは違うかも知れない．また, 観測者の知覚は物体の外見 (表面の状態) にも依存する可能性もある．この点については § 4.4 で後述するであろう．

## 3.2 線分や棒の見え方 (Apparent view of a line or rod)

単点の代わりに, 今度は真っ直ぐな線分 (line segment) $\vec{x}' + s'\vec{\sigma}'$, ただし $s' \in [s'_1, s'_2]$ を考える．その線分は, $S'$ の中で測定した特定な基準点 $\vec{x}'$ と大きさ $\|\vec{\sigma}\| = 1$ の方向 $\vec{\sigma}'$ とで定義される．式 (10) の $\vec{x}'$ を $\vec{x}' + s'\vec{\sigma}'$ で置き換えると次となる：

$$\vec{x}(s', \sigma') = \gamma x'^0(s', \vec{\sigma}')\vec{\beta} + \vec{\eta} + \vec{x}_{\rm obs} + s'\vec{\sigma}' + \frac{\gamma^2 s'}{\gamma + 1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}'\right)\vec{\beta}, \tag{14}$$

$$x'^0(s', \sigma') = \gamma\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\eta} - \rho\right) - \omega_{\rm line}(s'), \tag{15}$$

ただし, $\rho$ と $\vec{\eta}$ は式 (7) 中と同じ省略式である．そして,

$$\omega_{\rm line}(s')^2 = \omega_0^2 + 2s'v + s'^2, \tag{16}$$

$$v = \vec{\mu}\cdot\vec{\sigma}', \quad \text{with} \quad \vec{\mu} = \vec{\eta} + \vec{\beta}\left(-\gamma\rho + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{\eta}\right), \tag{17}$$

ただし $\omega_0$ は式 (8) のものである．線分の各点は, 観測時間に観測者が受光するように異なる時刻で光を放出しなければならない．従って, 線分の見かけの形は一般に直線ではない．詳細は, 接線方向 (tangent)・主法線方向 (normal)・従法線方向 (binormal) をさす 3 つの単位ベクトルの組 $\boldsymbol{t} = \vec{e}_1(s')$, $\boldsymbol{n} = \vec{e}_2(s')$, $\boldsymbol{b} = \vec{e}_3(s')$, で定義される線片に沿った「**フレネ・セレ座標**

**系**」(*Frenet-Serret frame*) を用いることで決めることが出来る．ただし,

$$T = \vec{e}_1(s') = \frac{d\vec{x}(s')/ds'}{\|d\vec{x}(s')/ds'\|} \tag{18}$$

また, その微分は

$$\frac{d\vec{x}(s')}{ds'} = -\gamma \frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')}\vec{\beta} + \vec{\sigma}' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}'\right)\vec{\beta} \tag{19}$$

そのノルムは

$$\left\|\frac{d\vec{x}(s')}{ds'}\right\|^2 = \gamma^2\frac{(s'+v)^2}{\omega_{\rm line}(s')^2}\beta^2 - 2\gamma^2\frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}'\right) + 1 + \gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}'\right)^2 \equiv f(s')^2 \tag{20}$$

ここで $\boldsymbol{t} = \vec{e}_1(s')$, $\boldsymbol{n} = \vec{e}_2(s')$, $\boldsymbol{b} = \vec{e}_3(s')$ は $s'$ でパラメータ化されているが, それらは系 $S$ について与えられている $[d\vec{x}(s')/ds'$ であり $d\vec{x}'(s')/ds'$ にはなっていない$]$ ことに注意する．

フレネ・セレ座標系は, 曲線がその曲線距離でパラメータ化された場合にだけ正当であるので, 主法線方向を式 (14) の二次導関数から直接的に決定することは出来ず, 接線方向 $\boldsymbol{t} = \vec{e}_1(s')$ の微分から計算しなければならない．従って,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2(s') &= \frac{d\vec{e}_1/ds'}{\|d\vec{e}_1/ds'\|}, \\
\text{with}\quad \frac{d\vec{e}_1}{ds'} &= -\frac{\omega_{\rm line}(s')^2 - (s'+v)^2}{f(s')^3\,\omega_{\rm line}(s')^3}\left\{\vec{\beta}\left[-\gamma^2\frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')}(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}') + \gamma + \frac{\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma})^2\right]\right. \\
&\qquad \left. +\vec{\sigma}\gamma^2\left[\beta^2\frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')} - (\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')\right]\right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

式 (21) の絶対値は主法線方向の規格化因子だけでなく, 曲線の曲率 $\kappa(s') = \|d\vec{e}_1/ds'\|$ ももたらす．それらは次で与えられる：

$$\begin{aligned}
\kappa(s')^2 = \left[\frac{\omega_{\rm line}(s')^2 - (s'+v)^2}{f(s')^3\,\omega_{\rm line}(s')^3}\right]^2\gamma^2\left\{\left(\frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')}\right)^2\gamma^2\beta^2\left[\beta^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')^2\right]\right. \\
\left. -2\gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')\frac{s'+v}{\omega_{\rm line}(s')}\left[\beta^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')^2\right] + \left[\beta^2 + (\gamma^2-2)(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')^2 - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}')^4\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

従法線方向 $\boldsymbol{b} = \vec{e}_3(s')$ の正確な形はここでは関心のないことである．

$\vec{\sigma}' \parallel \vec{\beta}$ または $\vec{\beta} = \pm\beta\vec{\sigma}'$ の特別な場合では, 直線は運動方向を向く (指す)．またそれに平行な場合では, 全ての $s' \in \mathbb{R}$ で曲率は $\kappa^{\parallel}(s') \equiv 0$ である．従って, そのような線分は見かけの長さは変化するが, 曲がっているようには見えない．§ 4.2 の例も参照せよ．

もし $\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}'=0$ (で線分が運動方向に垂直な場合) ならば, 曲率の式 (22) はかなり簡単化される．すなわち,

$$\kappa^{\perp}(s')=\frac{\omega_{\rm line}(s')^2-(s'+v)^2}{f(s')^2\,\omega_{\rm line}(s')^3}\gamma\beta \tag{23}$$

この最大値は $s'_{\rm max}=-v=-\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}'$ のときである．従って,

$$\kappa^{\perp}_{\rm max}=\frac{\gamma\beta}{\omega_{\rm line}(-v)}$$

予想された通りだが (as to be expected), 接線方向と主法線方向は次となる：

$$\boldsymbol{t}=\vec{e}^{\perp}_1(-v)=\vec{\sigma}',\quad \boldsymbol{n}=\vec{e}^{\perp}_2(-v)=-\frac{\vec{\beta}}{\beta}$$

式 (14) の見かけの線分は簡単になり次となる：

$$\vec{x}^{\perp}(s',\vec{\sigma}')=\vec{p}-\gamma\vec{\beta}\,\omega_{\rm line}(s')+s'\vec{\sigma}' \tag{24}$$

ただしこのときの参照点は $\vec{p}=\gamma^2[x^0_{\rm obs}+\vec{\beta}\cdot(\vec{a}-\vec{x}_{\rm obs})]\vec{\beta}+\vec{\eta}+\vec{x}_{\rm obs}$ である．$\vec{x}^{\perp}(s',\sigma')$ が双曲線の形となることを示すために $\vec{\beta}$ と $\vec{\sigma}'$ で張られる座標系に関する局所座標 $(\zeta,\xi)$ を定義する．$\xi$ と $\zeta$ は次とする：

$$\xi=\vec{\sigma}'\cdot\vec{x}^{\perp}=\vec{\sigma}'\cdot\vec{p}+s'=\xi_0+s',\quad \zeta=\vec{\beta}/\beta\cdot\vec{x}^{\perp}=\vec{\beta}/\beta\cdot\vec{p}-\gamma\beta\,\omega_{\rm line}(s')$$

そして $(\zeta-\zeta_0)^2/a^2-(\xi-c)^2/b^2=1$ を仮設 (ansatz) して $a,b,c$ を求めると次を得る：

$$1=\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{\gamma^4\beta^4/(\kappa^{\perp})^2}-\frac{(\xi-\xi_0+v)^2}{\gamma^2\beta^2/(\kappa^{\perp})^2} \tag{25}$$

ただし $\zeta_0$ と $\xi_0$ は次である：

$$\zeta_0=\gamma^2\beta[x^0_{\rm obs}+\vec{\beta}\cdot(\vec{a}-\vec{x}_{\rm obs})]+\gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{x}')+\vec{a}\cdot\vec{\beta},\quad \xi_0=(\vec{x}'+\vec{a})\cdot\vec{\sigma}'$$

基準座標系 $S'$ 中で曲率最大位置での接円 (osculating circle) は, 半径が $(\kappa^{\perp})^{-1}$ でその中心は $\vec{m}=\vec{x}^{\perp}(-v,\vec{\sigma})+(\kappa^{\perp})^{-1}\vec{e}^{\perp}_2(-v)$ である．これに相当する局所座標は次となる：

$$\zeta_m=\zeta_0-\gamma^2(\kappa^{\perp})^{-1},\quad \xi_m=\vec{x}_{\rm obs}\cdot\vec{\sigma}'$$

## 3.3 **球体の見え方** (Apparent view of a sphere)

基準座標系 $S'$ 中の球面は, 中心点 $\vec{x}'$, 直交基底ベクトル $\vec{\sigma}'_1, \vec{\sigma}'_2, \vec{\sigma}'_3$, 半径 $r'$, そして球面座標 $\vartheta' \in (0, \pi)$, $\varphi' \in [0, 2\pi)$ によって定義することが出来る. 線分の場合に類似したやり方は, 式 (10) の $\vec{x}'$ を今度は $\vec{x}' + r' \sin\vartheta' \cos\varphi' \, \vec{\sigma}'_1 + r' \sin\vartheta \sin\varphi' \, \vec{\sigma}'_2 + r' \cos\vartheta' \, \vec{\sigma}'_3 = \vec{x}' + \sum_{i=1}^{3} s'_i \vec{\sigma}'_i$ とすることであり, それより次を得る：

$$\vec{x} = \gamma \vec{x}'_0 \, \vec{\beta} + \vec{\eta} + \vec{x}_{\rm obs} + \sum_{i=1}^{3} s'_i \vec{\sigma}'_i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left( \sum_{i=1}^{3} s'_i \vec{\sigma}'_i \cdot \vec{\beta} \right) \vec{\beta}, \tag{26}$$

$$x'_0 = \gamma \left( \vec{\beta} \cdot \vec{\eta} - \rho \right) - \omega_{\rm sph}(s'_1, s'_2, s'_3), \tag{27}$$

$$\text{where} \quad \omega_{\rm sph}(s'_1, s'_2, s'_3)^2 = \omega_0^2 + 2\vec{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{3} s'_i \vec{\sigma}'_i + r'^2, \tag{28}$$

ただし $\vec{\mu}$ は, 式 (17) 中と同じ式である.

もし球の中心点 $\vec{x}'$, 観測者の位置 $\vec{x}_{\rm obs}$, そして系のオフセット (初期位置) $\vec{a}$ が一致してゼロであるならば, 式 (26) と式 (27) はかなり簡単なものとなる. 加えて, 基底ベクトル $\vec{\sigma}'_1, \vec{\sigma}'_2, \vec{\sigma}'_3$ が標準ベクトル $\vec{e}'_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{e}'_2 = (0,1,0)^T$, $\vec{e}'_3 = (0,0,1)^T$ に等しく, そして速度 $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$ が $x^1$-方向の成分だけがゼロでないとする. すると,

$$\omega_{\rm sph}^2 = \gamma^2 \beta^2 \left( x^0_{\rm obs} \right)^2 + 2\gamma x^0_{\rm obs} \beta r' \sin\vartheta' \cos\varphi' + r'^2, \tag{29}$$

$$x^1 = \gamma \left( \gamma x^0_{\rm obs} - \omega_{\rm sph} \right) \beta + \gamma r' \sin\vartheta' \cos\varphi', \tag{30}$$

$$x^2 = r' \sin\vartheta' \sin\varphi', \tag{31}$$

$$x^3 = r' \cos\varphi'. \tag{32}$$

予期した通りに, $x^2$-成分と $x^3$-成分は影響を受けていない. これは, 球が $x^1$-方向に沿ってのみ移動し, 他のパラメータは標準的な論文 (standard literature) と似たものとなるからである.

球のシルエットは, 球の運動に関係なく (irrespective of) 常に円形に見える. それは, 既に他の論文で示されていることである. 付録 B に, これがどのようにして証明できるかの短い概要を与えてある.

(参考) **空間曲線について**

(1) 曲線上の点 $P$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし, 曲線上の定点 $A$ から $P$ までの曲線の長さを $s$ とするとき,

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

を「**接線ベクトル**」と呼ぶ．$s+\Delta s$ に対応する曲線上の点を $Q$ とし,$P$,$Q$ に於ける接線の成す角度を $\Delta\theta$ とするとき,

$$\kappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|, \quad \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

を「**曲率**」と言う．このとき,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \kappa$$

が言えるので, $d\boldsymbol{t}/ds$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば,

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}$$

この $\boldsymbol{n}$ は $P$ に於ける接線に垂直な単位ベクトルであり, 点 $P$ に於ける曲線の「**主法線ベクトル**」と呼ばれる．また, 曲率は次となる：

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$P$ に於ける接線ベクトルと主法線ベクトルの定める平面を「$P$ に於ける**接触平面**」と言い, 曲率の逆数 $\rho = 1/\kappa$ を「**曲率半径**」,$P$ から主法線ベクトルの方向に $\rho$ の距離にある点を「**曲率の中心**」と言う．

(2) 曲線上の点 $P$ に於ける接線ベクトルと主法線ベクトルの外積

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$$

を, 点 $P$ に於ける曲線の「**従法線ベクトル**」と言う．$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ は互いに直交している単位ベクトルであり, 右手系をなす．$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ の定める平面は「**法平面**」と呼ばれ, それは曲線と直交する．このとき,

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}, |\tau| = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|$$

が言える．このときの $\tau$ は曲線の「**捩れ率** (ねじれりつ)」(torsion) と呼ばれる．

(3) 「**フレネ・セレの公式**」 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$ を $s$ で微分すると,

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\times\kappa\boldsymbol{n} = \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}$$

これと前の 2 式とを合わせた次式を「**フレネー・セレーの公式**」と言い, 空間曲線に関する基本的な公式である：

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} &= \quad +\kappa\boldsymbol{n} \\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} &= -\kappa\boldsymbol{t} \quad + \quad \tau\boldsymbol{b} \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \quad -\tau\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

# 4 例 (Examples)

以下では, 幾つかの典型的な例を示す．それらは全て付随する *asymptote* と *python* スクリプトにより再現することが可能である．またワイヤーフレーム表現と 4 次元レイトレーシングコード *GeoViS* を用いてそれをレンダリングした画像とを比較することもしている．python スクリプトの大きな利点はシーンを遅延なくアニメーションできることである．他方, レイトレーシングコードは一連の画像をレンダリングするのに数分かかり, それを後でフィルムに繋げなければならない．図のキャプションに記載されている名称のスクリプトの他に, 前節で議論した見かけの位置の計算を含んだ共通のスクリプト sr_apparent を用いる．拡張子が無いスクリプトは python でも asymptote でも有効であることに注意するべし．

## 4.1 視点またはカメラの変換 (Eyes or camera transformation)

§ 3 では単独点, 線分上の点, または球上の点の見かけの位置 (apparent position) を導出した．この見かけの位置は,「観測時刻にきちんと観測者に到達するように光が放出されなければならない空間中の位置」である．次のステップは, この見かけの位置を観測者の目またはカメラ, その両者はピンホールカメラで表現される, の位置にマッピングすることである．そのために, まずは「View 行列」によって見かけの位置をカメラの標準座標に変換する．次に,「Projection 行列」がピンホールカメラの透視投影 (perspective projection) をエミュレート (模倣) する．「View 行列」と「Projection 行列」は sr_camera で定義される．付録 C も参照すべし．より詳細なことは, コンピュータグラフィックスの標準的な論文, 例えば Foley[21] や Shirley et al.[22] などを読むことを勧める．

## 4.2 運動方向を向いた線分や棒の見え方 (Apparent view of a line/rod originated along its direction of motion)

点以外の最も基本的な物体 (対象) は, 直線または棒である．もし棒の向きが運動方向に沿っているならば, 式 (14) と式 (15) は簡単な式となる．従って, $\vec{\beta} = \beta\vec{\sigma}'$, $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{x}' = \vec{0}$ そして $s' \in [-l'/2, l'/2]$ ならば, 次を得る：

$$\vec{x}'(s', \vec{\sigma}') = \gamma \left[ x'^0(s', \vec{\sigma}')\beta + s' \right] \vec{\sigma}', \tag{33}$$

$$x'^0(s', \vec{\sigma}') = \gamma(-\beta\vec{\sigma}' \cdot \vec{x}_{\rm obs} + x^0_{\rm obs}) - \omega_{\rm line}(s'), \tag{34}$$

$$\omega_{\rm line}(s')^2 = \gamma^2 \left(-\beta\vec{\sigma}' \cdot \vec{x}_{\rm obs} + x^0_{\rm obs}\right)^2 - \left(x^0_{\rm obs}\right)^2 + \|\vec{x}_{\rm obs}\|^2 + 2s'v + s'^2, \tag{35}$$

$$v = \gamma \left(\beta x^0_{\rm obs} - \vec{\sigma} \cdot \vec{x}_{\rm obs}\right). \tag{36}$$

さらに $\vec{x}_{\rm obs} = \vec{0}$ ならば, 方向 $\vec{\sigma}'$ は重要ではなく,「棒の動きは観測者に向かうか離れて行くことだけ」である．そのとき,

$$\begin{aligned}
&v = \gamma\beta x^0_{\rm obs}, \quad \omega_{\rm line}(s')^2 = (\gamma\beta^2 + s')^2 \quad \rightarrow \quad \omega_{\rm line}(s') = \gamma\beta^2 + s' \\
&x'^0(s', \vec{\sigma}') = \gamma x^0_{\rm obs} - \omega_{\rm line}(s') = \gamma(1-\beta)x^0_{\rm obs} - s' \\
&\vec{x}(s', \vec{\sigma}') = \gamma[\gamma\beta(1-\beta)x^0_{\rm obs} - \beta s']\vec{\sigma}' = \gamma(1-\beta)[\gamma\beta x^0_{\rm obs} + s']\vec{\sigma}'
\end{aligned}$$

ただし, 遠のいて行くときは $\beta$ は $-\beta$ とすべきである．このときの棒の見かけの長さ $l_{\rm ap}$ は次で与えられる：

$$l^2_{\rm ap} = \|\vec{x}(l'/2, \vec{\sigma}') - \vec{x}(-l'/2, \vec{\sigma}')\|^2$$

このときの各値は,

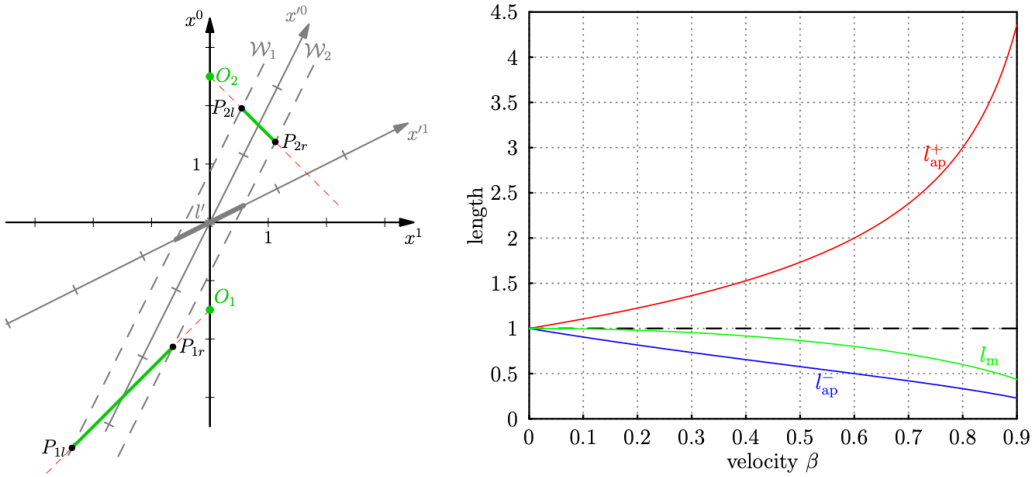
$$\begin{aligned}
&\vec{x}(l'/2, \vec{\sigma}') = \gamma(1 \pm \beta)[\gamma x^0_{\rm obs} + l'/2]\vec{\sigma}', \quad \vec{x}(-l'/2, \vec{\sigma}') = \gamma(1 \pm \beta)[\gamma x^0_{\rm obs} - l'/2]\vec{\sigma}', \\
&\text{therefore} \quad \vec{x}(l'/2, \vec{\sigma}') - \vec{x}(-l'/2, \vec{\sigma}') = \gamma(1 \pm \beta)(l'/2 + l'/2)\vec{\sigma}' = \gamma(1 \pm \beta)l'\vec{\sigma}'
\end{aligned}$$

従って棒の見かけの長さ $l_{\rm ap}$ は, 上の結果と $\|\vec{\sigma}'\| = 1$ を用いて次となる：

$$\begin{aligned}
l^{\pm}_{\rm ap} &= \|\vec{x}(l'/2, \vec{\sigma}') - \vec{x}(-l'/2, \vec{\sigma}')\| = \|\gamma(1 \pm \beta)l'\vec{\sigma}'\| = \|\gamma(1 \pm \beta)l'\| \\
&= \gamma l'(1 \pm \beta),
\end{aligned} \tag{37}$$

ただし複号の上 (下) 符号は, 近づく (遠のいて行く) 棒に相当する (represent)．このことは, 少しだけ一般的な場合 $\vec{x}_{\rm obs} = \xi\vec{\sigma}$ にも言えることである．図 3-(a) のミンコフスキー図は, この状況を描写している (depict)．観測点 $O_1$ では, 近づいて来る棒の見かけの長さは, 事象 $P_{1l}$

と $P_{1r}$ の $x^1$-座標で決定される．従って $\beta = 0.5$ の場合は $l^{+}_{\rm ap} \sim 1.732 l'$ を得る．観測点 $O_2$ では, 棒は観測者から遠のいて行き, 見かけの長さは $l^{-}_{\rm ap} \sim 0.577 l'$ となる．$S$ に関して同期して (時計を揃えて) いる二人の観測者によって測定される長さ $l_m$ は, ローレンツ-フィッツジェラルドの収縮式：$l_m = l'/\gamma$ から導かれる．従って, 観測者に近づいている棒は常に実際の長さよりも長く見える．しかし, 遠ざかって行く棒は $S$ に関して測定される長さ $l_m$ よりも短く見える．図 3-(b) では, 見かけの長さ $l^{\pm}_{\rm ap}$ と測定される長さ $l_m$ を, 共に速度 $\beta$ の関数として示している．




(a) Minkowski diagram, $\beta = 0.5$　　(b) Length depending on $\beta$

図 3　(a) $S'$ から見て長さ $l' = 1$ の棒は, その向きが運動方向 $\vec{\beta} = \beta\vec{\sigma}'$ を向いている．ただし $\vec{\sigma}'$ は $S$ の $x^1$-方向の正の向きにあるとする．このミンコフスキー図で, 緑線の $x$-軸への投影が棒の見かけの長さとなる．(b) $l^{\pm}_{\rm ap}$ は近づく (赤い) 棒と遠ざかる (青い) 棒の見かけの長さである．緑線は測定された長さ $l_{\rm m}$ を表している．

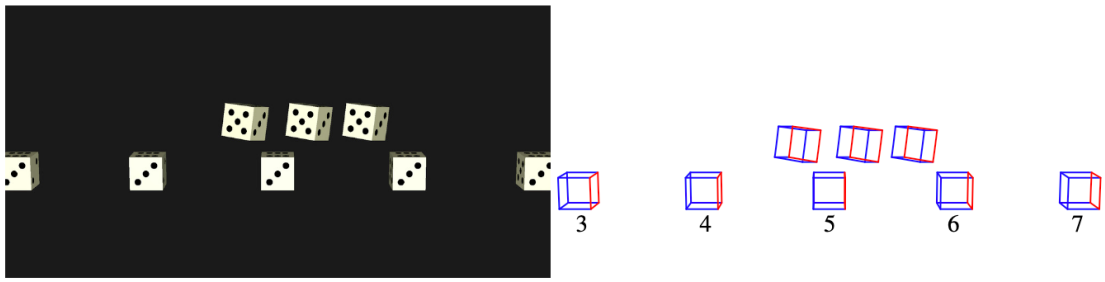
厳密に言うと, $\vec{x}_{\rm obs} = s'\vec{\sigma}$ で線分 (棒) の向きが運動方向に沿っているならば, 点 (先端) が見えるだけである．もし線分や棒が座標軸からわずかにズレている場合でも, 透視投影 (perspective projection) が考慮に入れなければならない．そのため, 観測者は計算した見かけの長さを見ることは出来ないであろう．

## 4.3　**サイコロの見え方** (Apparent view of a die)

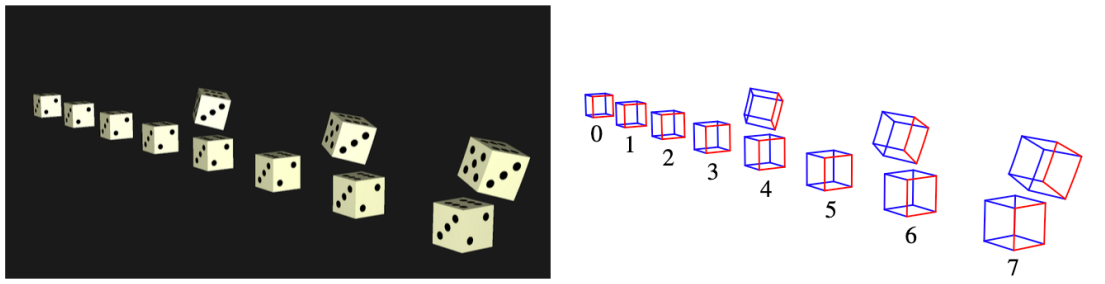
基準座標系 $S$ 中で, 辺の長さが $l = 0.5$ のサイコロ 8 個が横に並んで静止している場合を考える．$n$-番目のサイコロの中心は $\vec{x}_n = (0, -10 + n \cdot 2, -0.75)^T$, $n = 0, \cdots, 7$ に位置してい

る．同じ大きさの別のサイコロが基準座標系 $S'$ の中心で静止しているが, 系 $S'$ 自体は速度 $\vec{\beta} = (0, 0.9, 0)^T$ で動いているとする．位置 $\vec{x}_{\rm obs}$ で系 $S$ の原点の方を見ている観測者は, サイコロの列と動いているサイコロを図 4 で示しているように見るであろう．

図 4 中の動いているサイコロの観測時間は同じであるが, その見かけの位置は観測者の位置によって異なっている．もし観測者がサイコロの並びをそれと直交する方向から見るとしたら, 光の移動時間 (traveling times) はほとんど同じである．しかしながら, もし観測者がその並びを斜めから見るとしたら, そうはならない．最後尾の位置からの光は近い位置からよりもずっと多くの到達時間が必要となる．従って, 見かけの位置の間隔はより長くなってくる．




(a) Rendered, $\vec{x}_{\rm obs} = (14.422, 0, 2)^T$　(b) Wireframe model, $\vec{x}_{\rm obs} = (14.422, 0, 2)^T$




(c) Rendered, $\vec{x}_{\rm obs} = (8, 12, 2)^T$　(d) Wireframe model, $\vec{x}_{\rm obs} = (8, 12, 2)^T$

図 4　辺の長さ $l' = 0.5$ のサイコロが, 静止し横並びのサイコロたちの上を速度 $\vec{\beta} = (0, 0.9, 0)^T$ で動くときの見え方．観測者のピンホールカメラの視野は $32^\circ \times 16^\circ$ である．全てのサイコロの前方の辺は, その向きが分かり易いように赤色になっている．それらの観測時間は $x^0_{\rm obs} = \{14.012, 15.1, 16.12\}$ である．上段では, 観測者の位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (14.422, 0, 2)^T$ である．下段では, 観測者は $x^3$-軸からの距離は同じだがその位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (8, 12, 2)^T$ である．すなわち角度 $\phi = 56.3^\circ$ だけ $x^1$-軸から平行移動している．(スクリプトは appDie, animDie.py である)．

## 4.4 円や玉の見え方 (Apparent view of a circle/ball)

ペンローズ [6] は早くも 1959 年に,「相対論的に運動している球はやはり球に見える」ことを示した．しかしながら, 球の写真オブジェクトの形はより楕円に近い．図 5 を参照せよ．従って, 観測者は楕円を「眺める」けれど, 彼の視界面への投影は円状の外形となり, 従って彼の頭脳はそれを回転する球として解釈する．

動く円/玉の見かけの画像を追跡するために, カメラは円/玉の中心 $\vec{x}' = \vec{0}$ の見かけの位置の方向を向いていなければならない．標準配置 $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{x}_{\rm obs} = (0, -y_{\rm obs}, 0)^T$, $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$ では, $\rho = -x^0_{\rm obs}$ そして $\vec{\eta} = -\vec{x}_{\rm obs}$ である．従って, カメラは次のような見かけの位置 $\vec{x}_c$ を追跡するはずである：

$$\vec{x}_c = \gamma\beta x'^0, \quad \text{with} \quad x'^0 = \gamma x^0_{\rm obs} - \sqrt{\gamma^2\beta^2 (x^0_{\rm obs})^2 + y^2_{\rm obs}} \tag{38}$$

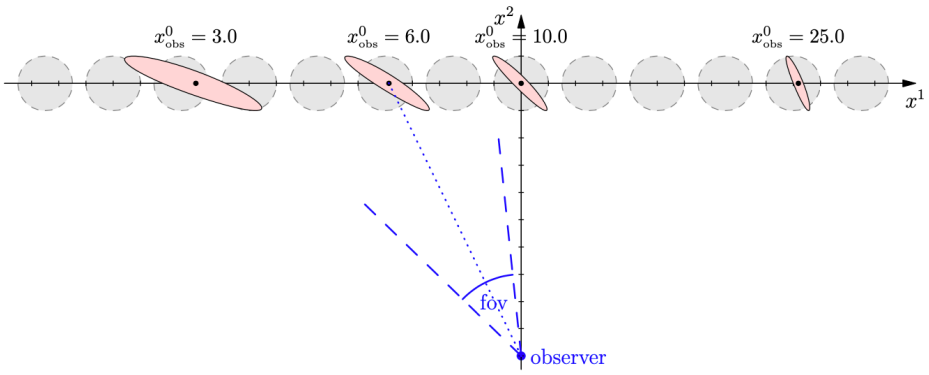
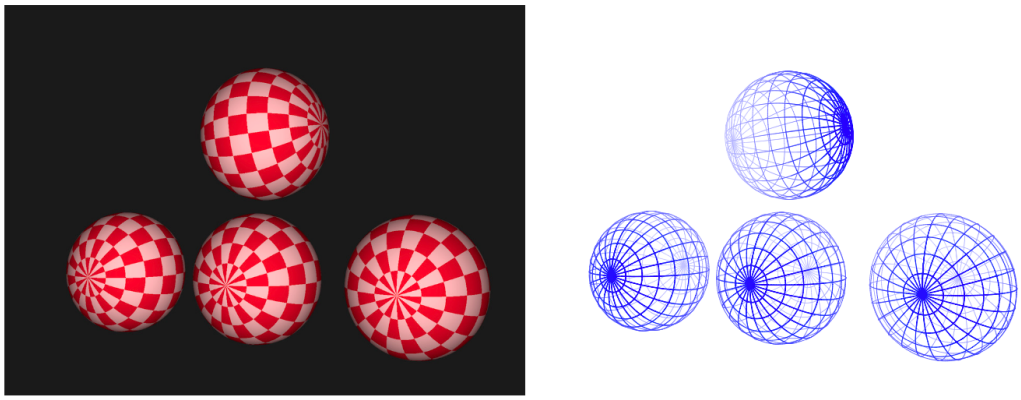



図 5　$\vec{x}_{\rm obs} = (0, -10, -1)^T$ の位置でオフセットが $\vec{a} = 0$, 速度が $\vec{\beta} = (0.9, 0, 0)^T$ そして観測時間が $x^0_{\rm obs}$ の場合に観測者が移動する円を見るときの見かけの (赤い) 形．円の中心点 (黒い点) は $S'$ から見て位置 $\vec{x}' = (0, 0, 0)^T$ にある．灰色の円盤は静止した円の列を表している．(スクリプトは appCircle, animCircle.py である).

図 6 は, その地軸をみな同じ方向に向けた静止玉が $x^1$-軸の正方向に沿って横に並んでいる上を, その方向に向かって動く玉を示している．*GeoViS* を用いて画像を 3 次元化 (レンダリング) した画像は,「動く玉はやはり球状ではあるが回転をしている」ように見えることを明確に示している．もしこの状況を標準的なワイヤーフレームモデルで視覚化すると, 球の前と後ろの線が視界面の上で交差しその結果「混乱した」印象 (cluttered impression) となるために,



(a) Rendered　　(b) Wireframe model

図 6　半径 $r' = 1$ のチェック柄の球は, 速さ $\beta = 0.95$ で $x^1$-軸の正の方向に沿って動いている．下段の球は静止し, 位置 $\vec{x}_n = (-17.5 + 2.5n, 0, -2.2)^T$, $n = \{4, 5, 6\}$ にある．観測者の位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (0, -10, -1)^T$ である．カメラの視野は $40^\circ \times 30^\circ$ である．ワイヤーフレーム画像に深さ情報を含めたことで, 動く球の右の極の周りの領域が観測者に最も近いことが明示されている．それは図 5 からも分かるが, レンダリング像ではほとんど分からない．(スクリプトは appSphere と, 深さ情報を持つ appSphereZ.asy である).

空間的な印象 (spatial impression) は失われてしまう．勿論であるが, これはワイヤーフレームモデル固有の特性である．しかしながら,*view* 行列と projection 行列を用いた視野面 (plane of view) 中への変換は, 投影位置の $\hat{p}^3$-成分に深さ情報を保存する．短い議論が付録 C にあるので参照のこと．我々はこの情報を用いて, 観測者に近い線を遠くの線よりも濃くそして強い色で描いた．実のところ, それはレンダリングされた画像では読み取れなかった情報, すなわち, すでに図 5 で見たように「動く球の右側の極が観測者に一番近い部分である」という情報, を抽出する助けにもなった．図 6(b) ではそれがよく分かる．しかし (a) のレンダリング画像ではそれを見ることが出来ない．しかし, これらの図形を生成するスクリプトは, 絵を細分化し, 奥行きの値を基準にして並べ替え, 奥行き昇順に描画しなければならないので, かなり複雑である．従って, 深さ情報を利用しないが簡単に読むことが出来るような, より簡単なスクリプトも含ませている．

## 4.5　近くで遭遇するときの見え方 (Apparent view of for close encounters)

前述の例では, 光の速度が有限であることによる歪み効果は比較的小さい．なぜなら物体と観測者の距離がそれらのサイズに比べて大きいからである．もし観測者の距離が物体のスケー

ルと同じくらいであると, 物体表面の異なる位置を源とする光線の飛行時間は大きく変化することになる．従って, 観測者は物体の異なる領域を大きく違う時刻に従って違う場所で見ることになる．そのため, 物体は非常に歪んで見える．

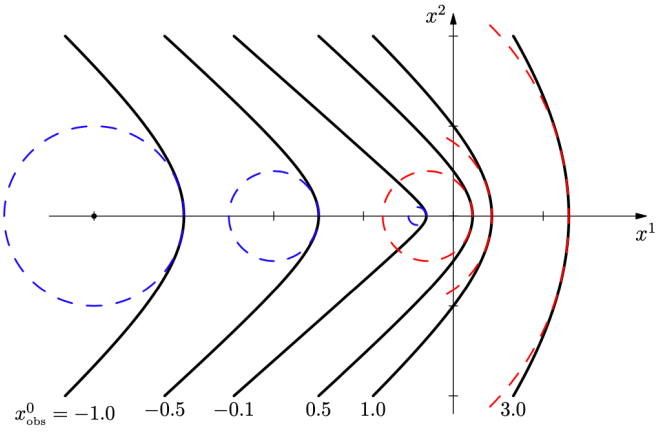



図 7　長さ $l' = 4$ の棒は運動方向と垂直な方向, $\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}' = 0$ を向いている．観測者は $\vec{x}_{\rm obs} = \vec{0}$ に位置し, また $\vec{a} = \vec{0}$ とする．接触円 (osculating circle) の半径は $(\kappa^{\perp})^{-1} = |x^0_{\rm obs}|$ である．(スクリプトは appRod と animRod.py である).

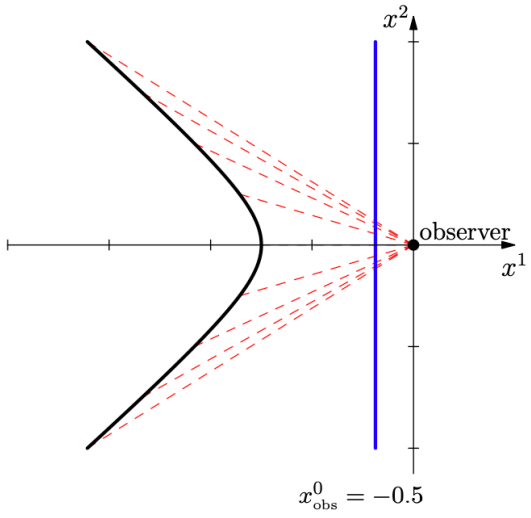



図 8　長さ $l' = 4$ で $\beta = 0.75$ で観測者の方へ動いている棒の写真オブジェクト．観測時刻 $x^0_{\rm obs} = -0.5$ では, 観測者が受け取る光線は, およそ $x^0_{\rm obs} = -3.0$ に既に出発した棒の外形部分からのものである．(スクリプトは appRodLight.asy と animRodLight.py である).

### 4.5.1 運動方向に垂直な線分/棒の見え方 (Apparent view of a line/rod oriented perpendicular to its direction of motion)

再び運動する棒の議論から始めるが, § 4.2 とは反対に, 今度は棒が運動方向に垂直に並んでいると仮定する．この場合, その見え方はずっと面白いものになる．次のように仮定する：

$$\vec{x}_{\rm obs} = \vec{a} = \vec{0} = \vec{x}', \quad \vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T, \quad \vec{\sigma}' = (0, 1, 0)^T$$

すると,

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}' = 0, \quad \rho = -x^0_{\rm obs}, \quad \vec{\eta} = \vec{0}, \quad v = 0, \quad \omega_{\rm line}(s')^2 = \gamma^2\beta^2(x^0_{\rm obs})^2 + s'^2$$

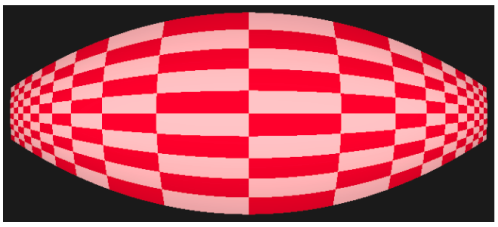
である．すでに § 3.2 で議論したことであるが, 垂直方向を向いた線分は, 次のような陰関数の式で記述される双曲線として見える：

$$1 = \frac{(x^1 - \gamma^2\beta x^0_{\rm obs})^2}{\gamma^4\beta^4(x^0_{\rm obs})^2} - \frac{(x^2)^2}{\gamma^2\beta^2(x^0_{\rm obs})^2} \tag{39}$$

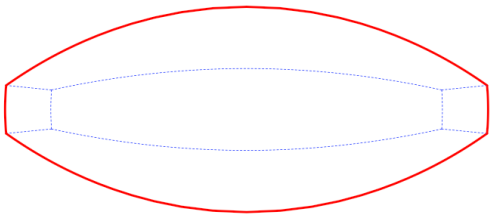
双曲線の頂点 (apex) は $x^1$-軸上にあり, そこでの曲率は $\kappa^\perp(s' = 0) = 1/x^0_{\rm obs}$ である (式 (23) を参照のこと)．接触円の中心座標は $x^1 = \gamma(\beta x^0_{\rm obs} - |x^0_{\rm obs}|)$ と $x^2 = 0$ である (図 7 を見よ)．$x^0_{\rm obs} = 0$ では, 双曲線は角形 (corner) になってしまう．棒の中央に近い点を源とする光線は外側の点からの光線よりも観測者に到る時間がずっと少ないので, 観測者は外側部分を中央よりも早い時刻に, 従って, より遠い距離に見ることになり, 棒は曲がって見える．図 8 は, この状況を $\beta = 0.75$ で動く棒の場合を図解したものである．観測時刻 $x^0_{\rm obs} = -0.5$ では,(ただし $x^0_{\rm obs} = 0$ は棒が観測者に到達した時刻と定義する), 動いている棒はすでに観測者に非常に接近しているけれど, 外側部分からの光線はおよそ $x^0_{\rm obs} = -3.0$ に早くもその表面を出発しており, 従って観測者は「棒はまだずっと遠くにある」と考えてしまう．図 9 は動く棒を示したもので, 棒は左下角が $\vec{c}_{\|} = (-0.1, -1.0, -0.1)^T$ で右上角が $\vec{c}_{\rm ur} = (0.1, 1.0, 0.1)^T$ の直平行六面体として描かれている．縦長方向 (longitudinal direction) の向きは $x^2$-軸の方向とし, 棒は $x^1$-方向に向かって動くとしている．図 9(a) では, ポリゴンレンダリング (多角形画像を 3 次元化) した例を示している．そこでは棒の角頂 (vertex) だけが見かけの位置に変換されている．この技法は強い歪みが出現する状況を正確に視覚化するには不十分であるのは明らかだ．なぜなら, 頂点を連結している辺が直線のままになっているからである．より詳しい議論は, 文献 [12] を参照のこと：T. Mueller, S. Grottel, and D. Weiskopf. Special Relativistic Visualization by Local Ray Tracing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 16:1243-1250, 2010.

図 9(b) と 9(c) は,*GeoVis* を用いた 4 次元レイトレーシング (コンピュータグラフィックスで全ての光線進路を計算により追跡して画面上の各点での色を決める技法) の結果と我々のワイヤーフレームモデルの *asymptote* スクリプトの結果を比較したものである．角頂だけでなく全ての辺も変換しているので, それらの双曲線的な形状が明らかになっている．

(a) Polygon rendering



(b) Rendered



(c) Wireframe model

図 9　$x^1$-方向に沿って速さ $\beta = 0.75$ で動いている棒．観測時刻は $x^0_{\rm obs} = -0.104$ で与えられ, 観測者は負の $x^1$-方向に沿って眺めている．棒の前方の辺は赤に色付けされ, 棒の向きが認識し易いようになっている．(スクリプトは appRodView と animRodView.py である).

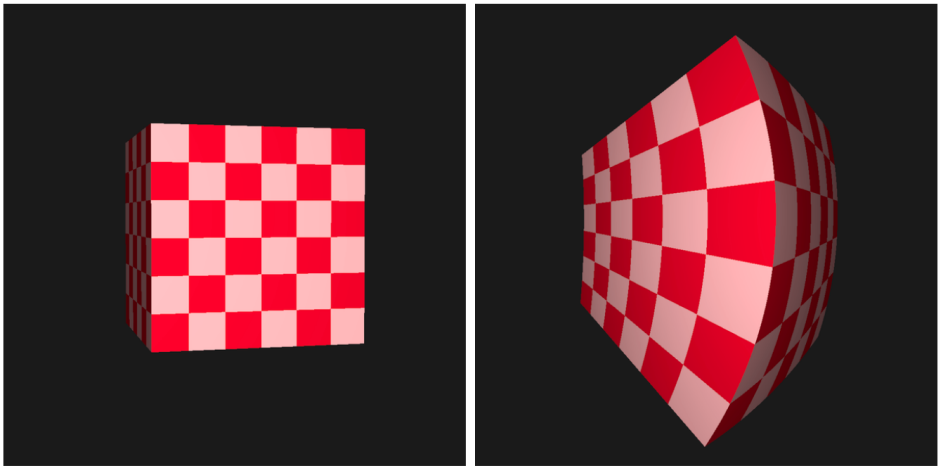
### 4.5.2　**接近通過するときの球と立方体** (Sphere and Cube in close fly by)

最後に, 静止した立方体及び球体と, 観察者の目の前を通過するように動いている立方体及び球体, を比較して例題を締めくくる．図 10 と図 11 を見よ．

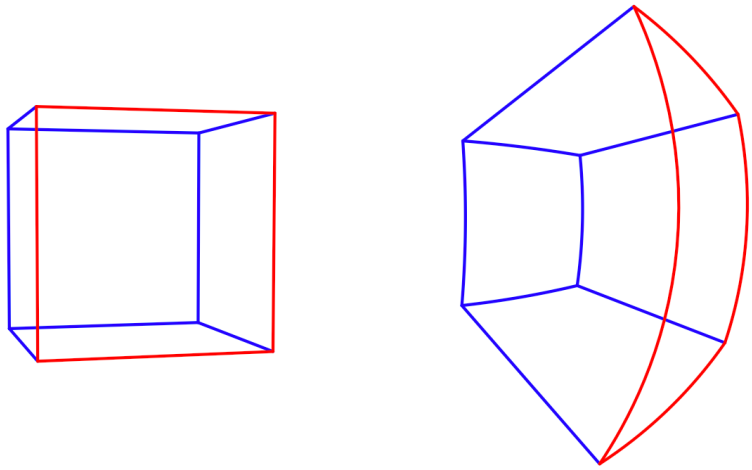
何方の場合も, 場面は, 動く物体の見かけの中心が静止した物体の中心と一致するように選ばれている．棒の例に反して, これらの場合は物体が観測者に向かって動いていないために対称的になっていない．

立方体の例では, 運動方向に対して垂直または平行に配向された線が違った見え方をすることが極めて明瞭となってくる．立方体の上辺と下辺は運動方向と殆ど平行な方向を向いている．従って直線に見えている．他方, 後方の辺と前方の辺は運動方向と殆ど垂直な方向を向いているので, 曲がって見えている．この効果は立方体の後方よりも前方の方がずっと強くなっている．その理由は, 前方の辺は観測者に近く, それらの辺上の異なる位置から出た光線の飛

行時間の違いがずっと大きいからである.



(a) Cube at rest　(b) Cube with $\beta = 0.9$

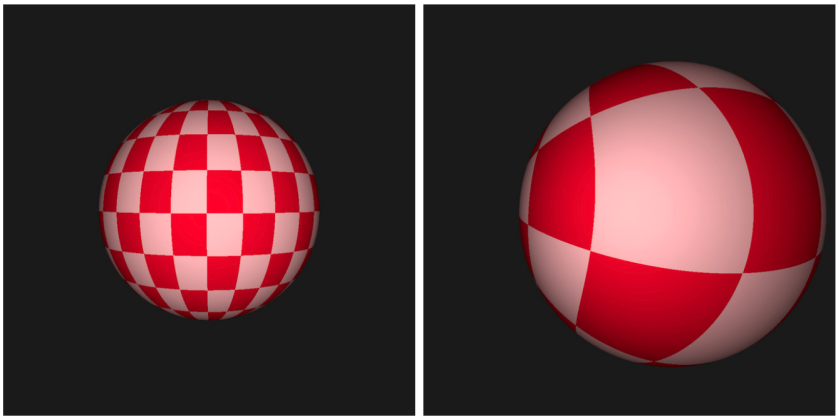


(c) Cube at rest　(d) Cube with $\beta = 0.9$

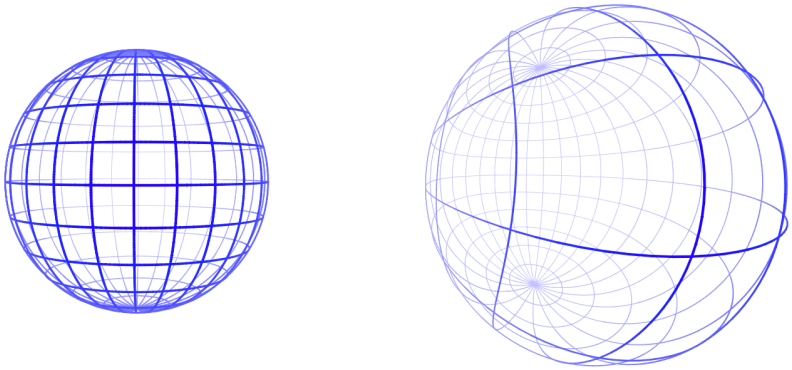
図 10　稜の長さ $l' = 0.5$ の立方体が近い所をフライバイ (flyby:接近通過) するときの見かけの歪み．カメラの視野は $32^\circ \times 32^\circ$ である．観測者の位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (0.5, 2.0, 0.05)^T$ である．すなわち $x^3$-軸との距離が $d = 1.5$ だけ離れた場所に居る．そして立方体は正の $x^2$-方向に沿って動いている．(スクリプトは appCube である).

球の例からは, 球の表面は非常に歪んでいるにも拘らず, その円状の形は保たれていることを明瞭に示している．これはペンローズによる結論と一致している．しかしながら, その大きさは静止した球よりもずっと大きくなっている．図 12 も参照せよ．ここで再度, 動く球の中心と静止した球の中心は一致していることに注意して欲しい．従って, この見え方は全く, よ

く知られた相対論的現象なのである．この例はまた,「深さの情報を含めることにより, どのようにして視覚的な印象を強化することが出来るのか」をも印象的に例示している．



(a) Sphere at rest　(b) Sphere with $\beta = 0.9$



(c) Sphere at rest　(d) Sphere with $\beta = 0.9$

図 11　半径 $r' = 0.5$ の球が近い所をフライバイするときの見かけの歪み．カメラの視野は $50^\circ \times 50^\circ$ である．観測者の位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (0.5, 2.0, 0.05)^T$ である．すなわち $x^3$-軸との距離が $d = 1.5$ だけ離れた場所に居る．そして立方体は正の $x^2$-方向に沿って動いている．(スクリプトは appSphereSigle と, 深さ情報を持たせた appSphereSingleZ.asy である).

## 5　まとめ (Summary)

この論文では, 相対論的に運動している点, 線分, そして球の見え方を記述する一般式を導出した．結果は *asymptote* と *python* スクリプトで実行し, ワイヤーフレーム物体で幾つかの典型的な光景 (exemplary scene) を生成し, それらの場合に対する結果と, 4 次元レイトレーシ

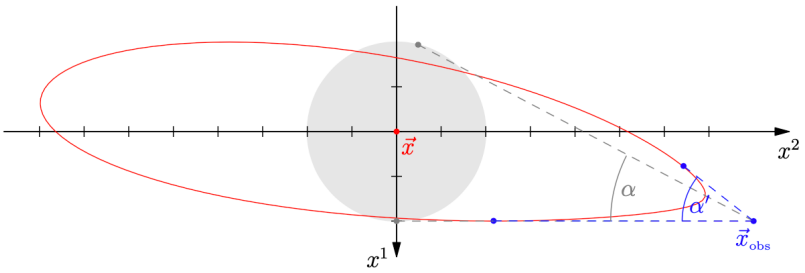



図 12　図 11 の 2 次元的な類似図．赤い写真オブジェクトで表現された見かけの球の角度サイズ $\alpha'$ は, 球の中心, ここでは $\vec{x} = \vec{0}$, の見かけの位置に於ける静止球 (灰色の円板) の角度サイズ $\alpha$ よりもずっと大きい．

ングで生成した画像と比較した．そして深さ情報を考慮に入れることでワイヤーフレーム画像 (figure) は, 特殊相対論な歪み効果の実際的な視覚的印象を生じることを示した．我々が作成したツールは非常に融通性があるので他のシーンを研究するために利用することが出来るであろう．他方, 我々が作成した例は, 相対論的に運動する物体の視覚的な外観 (見え方) を教える際の十分な助けとなるであろう．

## 付録 A　他の例 (Further examples)

以下では, デモンストレーションの目的で, あるいは演習として教室で直接使用できる例をいくつか挙げる．

**練習問題 1：**　長さ $l' = 4$ の棒が, 観察者の方向に垂直に移動するとする．(図 7 及び図 8 を参照すべし)．色々な速度を試し,「ロッドが速く動くほど強く曲がっているように見える理由」を説明せよ．

**結果：**　棒の速度が光の速度に近づくと, 棒の異なる位置から観察者までの光の移動時間はますます多様になる．従って, 棒の前面からの光と棒の中心からの光が観察者に同時に到達するためには, 前面の光は中心の光よりも早く出発しなければならない．その結果ロッドの曲がりは大きくなる．

構成ファイル：　demoRodLight.py

**練習問題 2：**　正の $x^1$-方向に沿って速さ $\beta$ で動いている半径 $r' = 0.5$ の球が与えられている．観測者の位置は $\vec{x}_{\rm obs} = (0, -100, 0)^T$ で $x^2$-方向を眺めている．(図 5. と比較せよ)．観測時刻を $x^0_{\rm obs} = 100$ に固定した場合, 観測者が眺めると球が運動方向で回転しているように見えるであろう．球の速度 $\beta$ と見かけの回転角度 $\alpha$ の関係を決定せよ．

**結果：**　$\beta = 0$ の場合, 球の軸/極は観測者の方を向いている．速度を増して行くと, 球は角度 $\alpha = \arctan(\beta\gamma)$ で回転するように見える．(Terrell [4] は余角を用いた)．角度 $\alpha$ はスクリプトにより作成された像から読み取ることが出来る．球の半径 $r$ と球の中心と極の間の距離 $d$ が共に相対単位すなわちピクセルで与えられると, 角度は $\alpha = \arcsin(d/r)$ となる．

構成ファイル：　demoSphere.py

**練習問題３：**　図 4(d) に類似して, 一つのサイコロが静止したサイコロ列の上を $\beta = 0.9$ で動いている．ここでは観測時刻を固定して $x^0_{\rm obs} = \{13.422, 14.422, 15.422\}$ とし, 観測者の位置は円上の関心点 $(0, 0, 2)^T$ の周わりを回転した点とする：$r_{\rm obs} = 14.422$,$0 \leq \phi \leq 2\pi$ として $\vec{x}_{\rm obs} = (r_{\rm obs}\cos\phi, r_{\rm obs}\sin\phi, 2.0)^T$ となる．観測時間が異なるときの動いているサイコロの見かけの位置の間隔はなぜ観測角度 $\phi$ に依存するのか?．$\beta$ が変化したら何が起こるであろうか?.

**結果：**　観測時刻 $x^0_{\rm obs} = 13.422$ の選び方は,「$r_{\rm obs} = 14.422$ である限り観測角度 $\phi$ に関わりなくサイコロの見かけの位置は保たれる」ように為されている．もし $\phi = \pi/2$ または $\phi = 3\pi/2$ ならば, 観測者はサイコロの列に沿って近づくか遠ざかるように観測することになる．その場合, 動くサイコロが何処に見えるかは光速度の有限さに強く影響される．このことは, ミンコフスキー図により全く容易に理解することが出来る．図 13 の点状物体だけについての類似状況を見よ．もし $\phi = 0$ または $\phi = \pi$ であると, 動くサイコロに現在位置から観測者までの光の移動時間はほとんど同じである．よって, 見かけの位置間の距離は観測時間が違う時の現在位置間の実際の距離を近似的に反映する.

構成ファイル：　demoDie.py

# 付録 B　動く球の円状シルエット (Circular silhouette of a moving sphere)

すでに何人かの著者, 例えば Penrose や Boas によって証明されているように, 相対論的に運動する球体のシルエット (輪郭) は, その速度に関係なく円形を保つ．この円形のシルエットを我々の一般的な標準構成の場合で示すためには、2 つのやり方に従うことが出来るであろう.

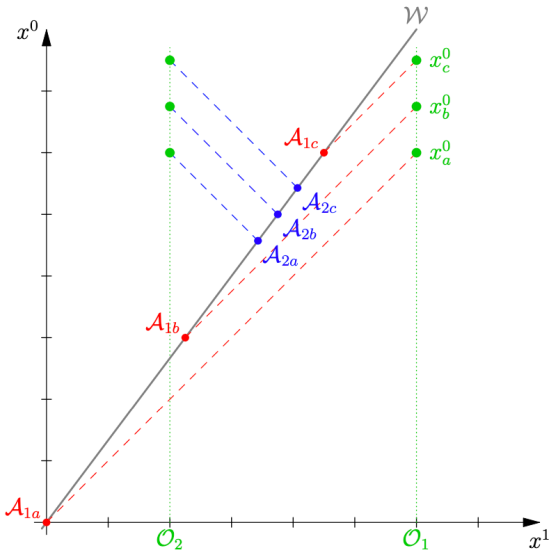



図 13　点状物体, 例えばサイコロの中心が正の $x^1$-方向を $\beta = 0.75$ で動いている．ここではミンコフスキー図中の灰色の世界線 $\mathcal{W}$ で示されている．静止している観測者 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の観測時刻は同じで,$x^0_a < x^0_b < x^0_c$ である．破線は, 該当する観測者の過去光円錐の一部と観測時刻を表している．近づく点についての見かけの位置 $\mathcal{A}_{1i}$ 間の距離は遠ざかる点についての見かけの位置 $\mathcal{A}_{2i}$ 間の距離よりも大きい．例えば, 次のようである：$|x^1(\mathcal{A}_{1a}) - x^1(\mathcal{A}_{1b})| > |x^1(\mathcal{A}_{2a}) - x^1(\mathcal{A}_{2b})|$.

## B.1　**直接的な計算** (Straightforward caluculation)

直接的なやり方は次のように機能する．まず, 見かけの各点 $\vec{x}$ での垂直ベクトル $\vec{n}$ を決定する．それは $\vec{x}$ の $\vartheta'$ についての微分と $\varphi'$ についての微分との外積によって与えられる：

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta'} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi'} \tag{B.1}$$

これを求めるには, 次の微分が必要である：

$$\frac{\partial x'^0}{\partial \vartheta'} = -\frac{\partial \omega_{\rm sph}}{\partial \vartheta'}, \quad \frac{\partial x'^0}{\partial \varphi'} = -\frac{\partial \omega_{\rm sph}}{\partial \varphi'}, \quad \frac{\partial x'^0}{\partial \vartheta'} = -\frac{\partial \omega_{\rm sph}}{\partial \varphi'} \tag{B.2}$$

ただし,

$$\frac{\partial \omega_{\rm sph}}{\partial \vartheta'} = \frac{1}{\omega_{\rm sph}} \vec{\eta} \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \vartheta'} \vec{\sigma}'_i \quad \text{and} \quad \frac{\partial \omega_{\rm sph}}{\partial \varphi'} = \frac{1}{\omega_{\rm sph}} \vec{\eta} \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \varphi'} \vec{\sigma}'_i \tag{B.3}$$

そこから次を得る：

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta'} = \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \vartheta'} \vec{\sigma}'_i \cdot \left(-\frac{\gamma}{\omega_{\rm sph}}\vec{\mu} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\right)\right]\vec{\beta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \vartheta'}\vec{\sigma}'_i, \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi'} = \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \varphi'} \vec{\sigma}'_i \cdot \left(-\frac{\gamma}{\omega_{\rm sph}}\vec{\mu} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\right)\right]\vec{\beta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \varphi'}\vec{\sigma}'_i \tag{B.5}$$

式 (B.4) と式 (B.5) の外積を作るときには $\vec{\beta}\times\vec{\beta} = 0$ そして基礎ベクトルの直交性：$\vec{\sigma}'_i \times \vec{\sigma}'_j = \epsilon_{ijk}\vec{\sigma}'_k$ を利用することが出来る．ただし $\epsilon_{ijk}$ は全反対称的な Levi-Civita 記号である．従って次を得る：

$$\vec{n} = \sum_{i=1}^{3} h_i(\vartheta', \varphi')\vec{\beta}\times\vec{\sigma}' + \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial s'_i}{\partial \vartheta'}\frac{\partial s'_j}{\partial \varphi'}\epsilon_{ijk}\vec{\sigma}'_k \tag{B.6}$$

ただし次の省略形 (abbreviation) を用いた：

$$h_i(\vartheta', \varphi') = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial s'_j}{\partial \vartheta'}\frac{\partial s'_i}{\partial \varphi'} - \frac{\partial s'_j}{\partial \varphi'}\frac{\partial s'_i}{\partial \vartheta'}\right)\vec{\sigma}'_j \cdot \left(-\frac{\gamma}{\omega_{\rm sph}}\vec{\mu} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\right) \tag{B.7}$$

直交ベクトルを用いることで, 接平面の方程式を構築することが出来る：$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = 0$．ただし, 見かけの点 $\vec{x}$ は平面の参照点である．任意の位置ベクトル $\vec{y}$ は観測者の位置 $\vec{x}_{\rm obs}$ で置き換える必要がある．その結果として得られる $\vartheta'$ と $\varphi'$ について陰の方程式が写真オブジェクトのシルエットを定義する．それは, 頂点が観測者の所に来る正円錐上に存在するはずである．

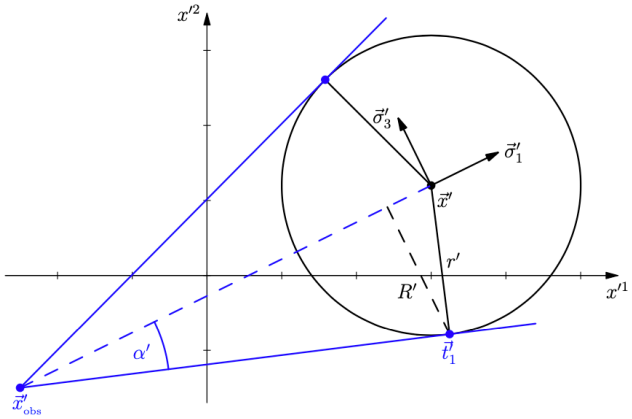



図 14　中心が点 $\vec{x}'$ で半径 $r'$ の球体に対して頂点角度が $\alpha'$ の接円錐 (青線)．基礎ベクトル $\vec{\sigma}'_2$ は投影面の中を指す．

## B.2 Boas の方法 (Boas strategy)

運動する球体のシルエットが円形であることを証明するもう一つの可能性は, 球体が静止する運動座標系 $S'$ 中から始めることである．(Boas [7] も参照のこと)．そのために, まずは $S$ から $S'$ への逆ポアンカレ変換：$x'^{\mu}_{\rm obs} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}(x^{\nu}_{\rm obs} - a^{\nu})$ を用いて, 観測者を変換しなければならない．

$S'$ 中では, 球体に接する円錐のパラメータは容易に決定できて (図 13 の 2 次元的に等価な場合の図を参照せよ),

$$\vec{d'} = \vec{x}' - \vec{x}'_{\rm obs}, \quad \sin\alpha' = \frac{r'}{\| \vec{d'} \|}, \quad R' = r' \cos\alpha' \tag{B.8}$$

ただし $\vec{d'}$ は円錐の頂点、$\alpha'$ は頂点角度, そして $R'$ は接する円環の半径である．球体の向きは影響を受けないので, 基礎ベクトル $\vec{\sigma}'_1$,$\vec{\sigma}'_1$, そして $\vec{\sigma}'_1$ は図 13 に示されているように設定する．すると, 接触円環 $\vec{x}'_c(\psi') = \vec{x}'_{\rm obs} + \vec{k}'(\psi')$ は角度 $\psi'$ でパラメータ化することが出来て, このときの $\vec{k}'(\psi')$ は次となる：

$$\vec{k}'(\psi') = \frac{r' \cos\alpha'}{\tan\alpha'} \vec{\sigma}'_1 + R' \cos\psi' \vec{\sigma}'_2 + R' \sin\psi' \vec{\sigma}'_3 \tag{B.9}$$

すると, 観測者に時刻 $x'^0_{\rm obs}$ に到着するように場所 $\vec{x}'(\psi')$ から光が放出される時刻 $x'^0(\psi')$ は, 式 (13) から導出される：

$$x'^0(\psi') = x'^0_{\rm obs} - \Delta(\vec{x}'(\psi'), \vec{x}'_{\rm obs}) = x'^0_{\rm obs} - \| \vec{d'} \| \cos\alpha' \tag{B.10}$$

この式から, ポアンカレ変換 (1) を経由することで $S$ に対する接触円環 $\vec{x}'_c(\psi')$ を決定することが出来る：

$$\vec{x}'_c(\psi') = \gamma \left( x'^0_{\rm obs} - \| \vec{d'} \| \cos\alpha' \right) \vec{\beta} + \vec{x}'_{\rm obs} + \vec{k}'(\psi') + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left[ \vec{\beta} \cdot \left( \vec{x}'_{\rm obs} + \vec{k}'(\psi') \right) \right] \vec{\beta} + \vec{a} \tag{B.11}$$

再び, この $\vec{x}'_c(\psi')$ は観測者の所に頂点を持つ直円錐上に位置するはずである (has to lie on a right circular cone).

# 付録 C　視界及び透視の投影 (View- and perspective projection)

ピンホールカメラの基準座標 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ は視線 (eye point) によって定義される．視線に相当するのは, 観測者の位置 $\vec{x}_{\rm obs}$, 関心点 $\vec{p}$, そして予備的なアップ-ベクトル $\vec{u}$ である．ピン

ホールカメラは負の $\vec{e}_z$ 方向を見ていることに注意して欲しい．$\vec{e}_z$ と右-軸 $\vec{e}_x$ の定義は次である：

$$\vec{e}_z = -\frac{\vec{p} - \vec{x}_{\text{obs}}}{\| \vec{p} - \vec{x}_{\text{obs}} \|}, \quad \vec{e}_x = \frac{\vec{u} \times \vec{e}_z}{\| \vec{u} \times \vec{e}_z \|}$$

そして最後に補正アップ-ベクトルは $\vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_x$ から導出される．従って, 点をカメラの基準座標にマッピングする行列である *View* 行列 $\mathbb{V}$ は次となる：

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} e_x^1 & e_x^2 & e_x^3 & -x_{\text{obs}}^1 \\ e_y^1 & e_y^2 & e_y^3 & -x_{\text{obs}}^2 \\ e_z^1 & e_z^2 & e_z^3 & -x_{\text{obs}}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

ピンホールカメラの視界を模倣 (emulating the view of) する透視投影は次の *Projection* 行列によって記述される：

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cot \frac{\text{fov}_y}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot \frac{\text{fov}_y}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -2\frac{fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

ただし $a$ はアスペクト比 (aspect ratio), 近傍切り取り面 (near clipping plane) を $n$, 遠方切り取り面 (far clipping plane) を $f$, そして鉛直視界 (vertical field of view) を $\text{fov}_y$ とする．これらの行列に対しては, 同次座標 $(x, y, z, w)$ が必要であり[*1], 計算は射影空間で行われるべきであることに注意する．そこで, 目的のために世界空間からカメラの視野平面に点 $p = (p^1, p^2, p^3)$ を写像するには以下のようにする．同次座標 $w = 1$ を点に付加し, 次の行列-行列-ベクトル掛け算を決定する：

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \mathbb{P}\mathbb{V}\boldsymbol{p}, \quad \text{with} \quad \boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3, 1)^T \tag{C.3}$$

その結果, 投影点 $\hat{\boldsymbol{p}}$ が得られる．透視の割り算 $\hat{\boldsymbol{p}} \mapsto (\hat{p}^1, \hat{p}^2, \hat{p}^3)/\hat{p}^w$ は $v_x, v_y \in (-1, 1)$ として, 視野面座標 $v_x = \hat{p}^1/\hat{p}^w$ と $v_y = \hat{p}^2/\hat{p}^w$ を生成する．座標 $v_z = \hat{p}^3/\hat{p}^w$ は点の深さ情報を含んでいる．

[*1] 「**同次座標**」(*homogeneous coordinate*) は射影空間内の座標であり, 平面ならば, $x_1/x_3 = x$,$x_2/x_3 = y$ とし,$(x_1, x_2, x_3)$ にゼロでない定数を乗じた点を同一と見做した座標である．なお, この付録記事では, 例えば「クリッピング面」などの 3 次元コンピュータグラフィックスや射影幾何学などの専門用語が多用されている．

# 参考文献


[1] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891-921, 1905.

[2] A. Lampa. Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter? *Zeitschrift für Physik*, 27:138-148, 1924.

[3] G. Gamow. *Mr. Tompkins in Wonderland*. Cambridge University Press, 1940.

[4] J. Terrell. Invisibility of the Lorentz contraction. *Phys. Rev.*, 116:1041-1045, 1959.

[5] R. Weinstein. Observation of Length by a Single Observer. *Am. J. Phys.*, 28:607-610, 1960.

[6] R. Penrose. The apparent shape of a relativistically moving sphere. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 55:137-139, 1959.

[7] Mary L. Boas. Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds. *Am. J. Phys.*, 29:283-286, 1961.

[8] P.K. Hsiung and R.H.P. Dunn. Visualizing Relativistic Effects in Spacetime. In *Proc. Supercomputing Conf. 89*, pages 597-606, 1989.

[9] D. Weiskopf. *Visualization of Four-Dimensional Spacetimes*. PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2001.

[10] T. Müller. GeoViS — Relativistic ray tracing in four-dimensional spacetimes. *Comput. Phys. Commun.*, 185:2301-2308, 2014.

[11] The first-person game prototype "A Slower Speed of Light" based on the OpenRelativity toolkit, http://gamelab.mit.edu/research/openrelativity, developed by the MIT Game lab uses polygon rendering to account for the apparent geometric distortions, see http: //gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light.

[12] T. Müller, S. Grottel, and D. Weiskopf. Special Relativistic Visualization by Local Ray Tracing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 16:1243-1250, 2010.

[13] D. Weiskopf. A survey of visualization methods for special relativity. In Hans Hagen, editor, *Scientific Visualization: Advanced Concepts*, volume 1 of *Dagstuhl Follow-Ups*, pages 289-302. Schloss Dagstuhl—Leibniz-Zentrum für Informatik, Germany, 2010.

[14] G. D. Scott and M. R. Viner. The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds. *Am. J. Phys.*, 33:534-536, 1965.

[15] G. D. Scott and H. J. van Driel. Geometrical Appearances at Relativistic Speeds. *Am. J. Phys.*, 38:971-977, 1970.

[16] F. R. Hickey. Two-dimensional appearance of a relativistic cube. *Am. J. Phys.*, 47:711-714, 1979.

[17] K. G. Suffern. The apparent shape of a rapidly moving sphere. *Am. J. Phys.*, 56:729-733, 1988.

[18] E. F. Taylor. Space-time software: Computer graphics utilities in special relativity. *Am. J. Phys.*, 57:508-514, 1989.

[19] Asymptote is a powerful descriptive vector graphics language that provides a natural coordinatebased framework for technical drawing, http://asymptote.sourceforge.net.

[20] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. Gravitation. W. H. Freeman, New York, 1973.

[21] J.D. Foley. *Computer Graphics: Principles and Practice.* Addison-Wesley, 1996.

[22] P. Shirley, M. Ashikhmin, and S. Marschner. *Fundamentals of Computer Graphics.* Ak Peters Series. Taylor & Francis, 2009.