The Theory of Positrons

R.P.Feynman*

(Recieved April 8, 1949)

概要

外部ポテンシャルが与えられたときの陽電子と電子がどんな振舞いをするかという問題を, 互いの相互作用を無視した場合で解析してみる．それは, ディラック方程式解を再解釈することで行われ, ホール理論に代わるものとなる．波動関数の境界条件に関する問題の完全な解を書き下すことが可能であり, その解は, 通常の散乱過程に加えて, 仮想ペア (と実在ペア) の生成と消滅の全ての可能性を自動的に含んでおり, 様々な項の相対的な符号も正しく与えられる．

その解では, 負のエネルギー状態が,(Stücklberg に依るように) 時間を遡って外部ポテンシャルから遠ざかる時空中の波のような描像で出現する．実験的に言うと, そのような波は, ポテンシャルに接近し電子を消滅させる陽電子に相当している．ポテンシャル中で時間を順行して運動する粒子 (電子) は, 時間を順行して散乱される (通常の散乱) か, 逆行して散乱される (対消滅) ことが起こり得る．時間を逆行する粒子の場合 (陽電子), それは時間を逆行して散乱される (陽電子散乱) か, 順行して散乱される (対生成) ことが起こり得る．このような粒子の場合, 始状態から終状態へ遷移する振幅は, 粒子がそのような一連の散乱を受けると考えることで, ポテンシャルの任意のオーダーで解析される．

このような粒子を多く含んだ過程に対する振幅は, 各々の粒子の遷移振幅の積である．排他原理の要求から, 粒子交換だけ違うそれらの完全な過程の振幅は反対称結合が選択されなければならない．排他原理が用いられる場合にのみ, 矛盾のない解釈が可能であるように見える．中間状態に排他原理を考慮する必要はない．互いに相互作用しない電荷には, 真空問題は起こらないが, それでも量子電磁力学への応用を見越して, それらは検討される．

結果は運動量-エネルギー変数でも表現される．付録では, 正孔の第二量子化との等価性が証明される．

* Department of Physics, Cornell University, Ithaca, New York

1　導入

これは量子電磁力学の問題解決を扱う一連の論文の最初のものである．主な指針は, ハミルトンの微分方程式そのものを扱うのでなく, その解を直接扱うことである．ここでは簡単に, 与えられた外部ポテンシャル中の電子と陽電子の運動を扱う．2 番目の論文では, これらの粒子の相互作用, 即ち量子電磁力学を考える．

ポテンシャル一定中の電荷の問題は, 通常では正孔理論のアイデアを用いた電子場の第 2 量子化の手法によって扱われる．しかしディラック方程式の解の適切な選択と解釈により, この問題は, 基本的には 1 つ以上の粒子を扱うシュレーディンガーの方法よりも複雑ではない方法で同様に処理できることを提示する．粒子数が保存されてないため, つまりペアが生成されたり消滅されたりする可能性があるため, 従来の電子場の見方では様々な生成および消滅の演算子が必要となる．一方, 電荷は保存される．これは, 粒子ではなく電荷を追えば結果は単純化できることを示唆している．

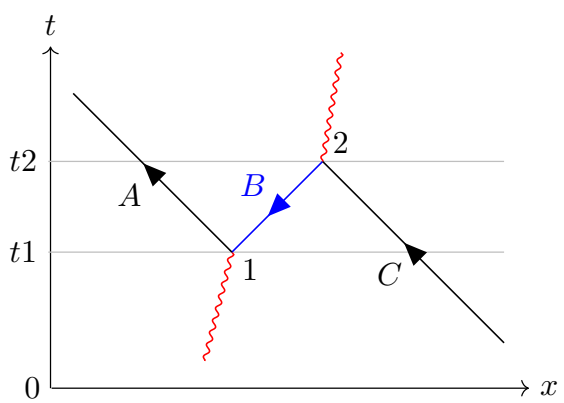

図 0　pair creation and annihilation (訳者による).

古典的な相対論の近似では, 対 (電子 A, 陽電子 B) の生成は, 生成点 1 から 2 つの世界線が始まることで表現される．陽電子の世界線は, 世界点 2 でもう一つの電子 C を消滅させるまで続く．すると, 時間 t_1 と時間 t_2 の間では，3 本の世界線があり, その前後には 1 本の世界線しか存在しないことになる．しかし, C, B, A の世界線を合わせると 1 本の連続した線になるが, この連続した線の内の「陽電子の部分」B は時間的に後ろに向かっている．粒子ではなく電荷を追うことは, この連続した世界線をバラバラにするのではなく, 全体として考えることに相当している．それはあたかも道路の上を低空飛行していた爆撃機乗り (bombardier) が, 突然

3 本の道路を見て, そのうちの 2 本が一緒になって再び消えたときに, 自分は 1 本の道路の長いスイッチバックを通過しただけだと気付くようなものである.

このような時空間の全体的な視点を持つことで, 多くの問題がかなり単純化される. 通常であれば別々に考えなければならない過程を同時に考慮することが出来る. 例えば, ポテンシャルによる電子散乱を考えるとき, 仮想ペア生成の効果を自動的に考慮することが出来る. また, 場中の電子の世界線の偏向 (deflection) を記述する式と同じディラック方程式が, 世界線の時間軸を反転させるほどの大きな偏向を記述することが出来る. それにより, この式は対消滅に相当する式となり得る. 量子力学的には, 世界線の方向が波の伝搬方向に置き換えられる.

これは, 過去から未来へと連続的に発展していくと考えるハミルトニアンの方法とは全く異なる考え方である. ここでは, 時空の全歴史が描かれていて, 私たちはその一部を次々と認識していくというイメージである. 散乱問題では, このような散乱過程全体を俯瞰する視点は, ハイゼンベルクの S-行列の視点に似ている. 散乱中の事象の時間的順序は, ハミルトンの微分方程式では詳細に分析されるが, それは問題とされない (irrelevant). これらの視点の関係については, より複雑な相互作用を分析する第 2 論文の序論でより詳しく説明する.

このような視点の展開は,「非相対論的な量子力学では, ある与えられた過程の振幅は使用可能な時空経路の各々の振幅の合計と見做せる」という考えから起こった[*1]. 古典物理学では, 陽電子は世界線に沿って過去に向かって進む電子と見做すことが出来る (参考文献の 7) という事実に鑑みて, 相対論的な場合では, 経路が時間的に常に一方向に進まなければならないという制約を取り除くことが試みられた. この結果は, 散乱波という, より身近な物理学的視点から見ると, より理解しやすいことが分かった. この論文では, このような視点を用いている. 式を物理的に解いた後, 第二量子化の理論との等価性を証明することが出来た[*2].

まず, シュレディンガー方程式を例にとり, ハミルトンの微分方程式とその解との関係について説明する. 次に, Dirac 方程式を類似の方法で扱い, 陽電子に適用するにはその解をどのように解釈すればよいかを示す. その解釈は電子が排他原理に従わない限り一致しないようである. (クライン-ゴルドン方程式に従う電荷が類似の方法で記述できる. しかし, そこでは矛盾しないためには明らかにボーズ統計が要求される[*3]). そして行列要素の計算に役立つ「運動量及びエネルギーを変数とする表現」について説明する. この方法が第二量子化における正

[*1] R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[*2] 全ての手法が Schwinger および朝永の研究と同等であることが F.J.Dyson, Phys. Rev. **75** 486 (1949) によって証明された.

[*3] W.Pauli による, スピンと統計との一般的な関係についての特別な例が, Phys. Rev. **58**, 716 (1940) に載っている.

孔理論と同等であることの証明は付録に掲げておく.

2 グリーン関数によるシュレディンガー方程式の取扱い方

まず, 非相対論的な波動方程式とその解の関係について簡単に説明する．次に, 概念を Dirac 方程式を満たす相対論的粒子へ拡張する．そして最後に, 相互作用する相対論的粒子, すなわち量子電磁力学への拡張を次の論文で行う.

シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{1}$$

は, 演算子 $\exp(-iH\Delta t)$ の作用により無限小時間 Δt の間に生じる波動関数 ψ の変化量を記述するものである．また，$\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ が時刻 t_1 で位置 $\boldsymbol{x}_1$ の波動関数ならば, 時刻 $t_2 > t_1$ ではどんな波動関数になるであろうか, と問うことも出来る．それは次のように書くことが常に可能である：

$$\psi(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \int K(\boldsymbol{x}_2, t_2; \boldsymbol{x}_1, t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \tag{2}$$

ただし K は線型方程式 (1) に対するグリーン関数である．(座標が $\boldsymbol{x}$ の一粒子に話を限定するが, 方程式はずっと大きな一般性を持っていることは明らかである)．H が固有値 E_n と固有関数 ϕ_n を持つ定常演算子で, $\psi(\boldsymbol{x}, t_1)$ が $\psi(\boldsymbol{x}, t_1) = \sum_n C_n\phi_n(\boldsymbol{x})$ と展開できるならば $\psi(\boldsymbol{x}, t_2) = \sum_n \exp\{-iE_n(t_2 - t_1)\}C_n\phi_n(\boldsymbol{x})$ となる[*100]．$C_n = \int \phi^*(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1$ なので, この場合の $K(2,1)$ (ただし $\boldsymbol{x}_1, t_1$ を 1 そして $\boldsymbol{x}_2, t_2$ を 2 と略記する) は, $t_2 > t_1$ のとき次となる：

$$K(2,1) = \sum_n \phi_n(\boldsymbol{x}_2)\phi_n^*(\boldsymbol{x}_1)\exp\{-iE(t_2 - t_1)\} \tag{3}$$

$t_2 < t_1$ の場合には $K(2,1) = 0$ と定義するのが便利であることが分かるであろう．(従って, 式 (2) は $t_2 < t_1$ の場合には妥当でないことになる)．すると, 一般に K は次式の解で定義することが出来ることを示すのは容易である：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_2} - H_2\right)K(2,1) = i\delta(2,1) \tag{4}$$

これは $t_2 < t_1$ の場合にはゼロとなる．ここで $\delta(2,1) = \delta(t_2 - t_1)\delta(x_2 - x_1)\delta(y_2 - y_1)\delta(z_2 - z_1)$ である．また H_2 の添字 2 は, 演算子が $K(2,1)$ の 2 の変数に作用することを意味している.

[*100] [訳註] 原論文では和の記号 $\sum_n$ が抜けているので注意する.

H が一定でない場合, 式 (2) と式 (4) は正当であるが, そのときの K は式 (3) よりも評価するのが困難である[*101]

✎【 訳者註 】 **********

Feynman & Hibbs の § 4-2 から要点をまとめておく．シュレディンガー方程式の固有値 E_n の固有関数を $\phi_n(x)$ とすると, 一般解はこのエネルギー解の 1 次結合で表わすことが出来る．従って, 任意時刻 t に於ける波動関数 $\psi(x,t)$ は, 固有関数 $\phi(x)$ を用いて次のように表せる：

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) = \sum_n a_n e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x), \tag{a}$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_n^*(x) \psi(x,t), \quad a_n = c_n e^{iE_n t/\hbar} \tag{b}$$

すると, 時刻 t_1 と時刻 t_2 に於ける波動関数について次が言える：

$$\begin{aligned}
\psi(x,t_1) &= \sum_n a_n\, e^{-iE_n t_1/\hbar} \phi_n(x) = \sum_n c_n \phi_n(x), \\
a_n &= c_n\, e^{iE_n t_1/\hbar}, \quad c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_n^*(x) \psi(x,t_1), \\
\therefore\ \psi(x,t_2) &= \sum_n a_n\, e^{-iE_n t_2/\hbar} \phi_n(x) = \sum_n \left(c_n\, e^{iE_n t_1/\hbar} \right) e^{-iE_n t_2/\hbar} \phi_n(x) \\
&= \sum_n e^{-iE_n (t_2 - t_1)/\hbar} c_n \phi_n(x) \\
&= \sum_n e^{-iE_n (t_2 - t_1)/\hbar} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \phi_n^*(y) \psi(y,t_1) \right\} \phi_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(y) e^{-iE_n (t_2 - t_1)/\hbar}\, \psi(y,t_1) \\
&= \int dy\, K(2,1)\, \psi(y,t_1)
\end{aligned} \tag{c}$$

従って核 K は $t_2 > t_1$ の場合, 本文の式 (3) のようになることが分かる：

$$K(2,1) = K(x,t_2;y,t_1) = \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(y) e^{-iE_n (t_2 - t_1)/\hbar} \tag{d}$$

[*101] [訳註] 非相対論的な粒子の場合には $\phi_n = \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}), E_n = \boldsymbol{p}^2/2m$ なので, 式 (3) は $t_2 > t_1$ の場合,

$$\begin{aligned}
K_0 &= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \exp\left[-\left(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_1 - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_2 \right) - \frac{i\boldsymbol{p}^2 (t_2 - t_1)}{2m} \right] \\
&= \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i (t_2 - t_1)}} \right)^3 \exp\left[\frac{im(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)^2}{2(t_2 - t_1)} \right]
\end{aligned}$$

を与え, $t_2 < t_1$ では $K_0 = 0$ を与えることはよく知られている．(Feynman&Hibbs の式 (3-3) を見よ).

********** ✎

$K(2,1)$ は $\boldsymbol{x}_1$,t_1 から出発し $\boldsymbol{x}_2$,t_2 に到達する全振幅と呼ぶことが出来る．(これは, それらの点間の時空経路の各々について振幅 $\exp(iS)$ を足し合わせた結果である．ただし S は経路に沿った作用である[*1])．時刻 t_1 で状態 $\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)$ にあった粒子が時刻 t_2 で状態 $\chi(\boldsymbol{x}_2,t_2)$ に見出す場合の遷移振幅は次である：

$$\int \chi^*(2)K(2,1)\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1 d^3\boldsymbol{x}_2 \tag{5}$$

量子力学系は, 関数 K を指定しても, その K の起因であるハミルトニアン H を指定しても, 同様に記述される．ある目的のためには, K での指定の方が使い易く, 視覚的にも分かり易い．最終的には, この観点から量子電気力学を議論したいと考えている．K 関数とそれが示唆する視点について理解を深めるために, 簡単な摂動問題を考えて見よう．位置と時間の関数である弱いポテンシャル $U(x,t)$ の中に粒子が在るとする．t_1 と t_2 の間の t だけで U がゼロでない場合の $K(2,1)$ を計算しようと思う．K を U の累乗で展開して見よう：

$$K(2,1) = K_0(2,1) + K^{(1)}(2,1) + K^{(2)}(2,1) + \cdots \tag{6}$$

U のゼロ次のオーダーでは、K は自由粒子の核 $K_0(2,1)$ である[*4]．一次補正 $K^{(1)}(2,1)$ を検討するために, まず, ある時刻 t_3 と $t_3+\Delta t_3$ の間の無限小の時間間隔 Δt_3 においてのみ、U がゼロとは異なると考えよう (ただし $t_1 < t_3 < t_2$ とする)．すると $\boldsymbol{x}_1$,t_1 に於ける波動関数を $\psi(1)$ とすれば, 時刻 t_1 から t_3 まで粒子は自由であることから, $\boldsymbol{x}_3$,t_3 に於ける波動関数は次となる：

$$\psi(3) = \int K_0(3,1)\,\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1 \tag{7}$$

短い区間 Δt_3 に於いては, 式 (1) は次のように解ける[*102]：

$$\psi(\boldsymbol{x},t_3+\Delta t_3) = \exp\big(-iH\Delta t_3\big)\psi(\boldsymbol{x},t_3) = \big(1 - iH_0\Delta t_3 - iU\Delta t_3\big)\,\psi(\boldsymbol{x},t_3)$$

[*102] [訳註] 式 (1) を時間 t について t_3 から $t_3+\Delta t_3$ まで積分すると,

$$\frac{d\psi}{\psi} = -iH dt \quad\to\quad \int_{t_3}^{t_3+\Delta t_3}\frac{d\psi}{\psi} = -\int_{t_3}^{t_3+\Delta t_3} iH\,dt \quad\to\quad \Big[\log\psi\Big]_{t_3}^{t_3+\Delta t_3} = -iH\Delta t_3,$$

$$\to\quad \log\frac{\psi(t_3+\Delta t_3)}{\psi(t_3)} = -iH\Delta t_3 \quad\to\quad \frac{\psi(t_3+\Delta t_3)}{\psi(t_3)} = e^{-iH\Delta t_3} = e^{-i(H_0+U)\Delta t_3},$$

$$\therefore\quad \psi(t_3+\Delta t_3) = \exp\{-i(H_0+U)\Delta t_3\} \approx \big(1 - i(H_0+U)\Delta t_3\big)\psi(t_3)$$

ただし, 自由粒子のハミルトニアンを H_0 として $H = H_0 + U$ とおいた．従って $\psi(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3)$ は, 電位がゼロの場合の $\psi_0(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3)$ とは次の余分な部分 $\Delta\psi$ だけ異なる：

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) &= \big(1 - iH_0\Delta t_3\big)\psi(\boldsymbol{x}, t_3) - iU\psi(\boldsymbol{x}, t_3)\Delta t_3 \\
&= \exp\big(-iH_0\Delta t_3\big)\psi(\boldsymbol{x}, t_3) - iU\psi(\boldsymbol{x}, t_3)\Delta t_3 \\
&= \psi_0(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) - iU\Delta t_3\psi(\boldsymbol{x}, t_3), \\
\therefore \quad \Delta\psi(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) &= \psi(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) - \psi_0(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) \\
&= -iU(\boldsymbol{x}_3, t_3)\Delta t_3\psi(\boldsymbol{x}_3, t_3),
\end{aligned}
\tag{8.a}
$$

これを「ポテンシャル $U(3)$ からの散乱振幅」と呼ぶことにする．$t_3 + \Delta t_3$ の後, 粒子は再び自由となるので、2 に於ける波動関数は次で与えられる：

$$
\psi(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \int K_0(\boldsymbol{x}_2, t_2; \boldsymbol{x}_3, t_3 + \Delta t_3)\, \psi(\boldsymbol{x}_3, t_3 + \Delta t_3)\, d^3\boldsymbol{x}_3
$$

従って 2 に於ける波動関数の変化は, 次のポテンシャルによってもたらされる：

$$
\Delta\psi(2) = -i\Delta t_3 \iint K_0(2,3)\, U(3)\, K_0(3,1)\, \psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_3 \tag{8.b}
$$

この式を得るには, 式 (7) を式 (8) に代入し, その式 (8) を $\psi(\boldsymbol{x}_2, t_2)$ に対する方程式に代入し, $K_0(2, t_3 + \Delta t_3) \fallingdotseq (1 - iH\Delta t_3)K_0(2,3)$ を用いればよい：

$$
\begin{aligned}
\Delta\psi(\boldsymbol{x}, t_3 + \Delta t_3) &= -iU(\boldsymbol{x}_3, t_3)\Delta t_3 \int K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \\
&= -i\Delta t_3 U(3) \int K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1, \qquad (8.c) \\
\Delta\psi(2) &= \int K_0(\boldsymbol{x}_2, t_2; \boldsymbol{x}_3, t_3 + \Delta t_3)\, \Delta\psi(\boldsymbol{x}_3, t_3 + \Delta t_3)\, d^3\boldsymbol{x}_3 \\
&= \int K_0(2, t_3 + \Delta t_3) \left\{ -i\Delta t_3 U(3) \int K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \right\} d^3\boldsymbol{x}_3 \\
&= -i\Delta t_3 \iint K_0(2, t_3 + \Delta t_3) U(3) K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_3 \\
&\fallingdotseq -i\Delta t_3 \iint (1 - iH\Delta t_3) K_0(2,3) U(3) K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_3 \\
&= -i\Delta t_3 \iint K_0(2,3) U(3) K_0(3,1)\psi(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_3 + \mathcal{O}(\Delta t_3^2)
\end{aligned}
$$

ポテンシャルが長時間にわたって存在する場合には, 各間隔 Δt_3 からの影響の合計として見ることが出来るので, $\boldsymbol{x}_3$ だけでなく t_3 でも積分することで全体の影響が得られる．K の定義式

(2) から, 次式が分かる[*103]：

$$K^{(1)}(2,1) = -i\int_{-\infty}^{\infty} K_0(2,3)\,U(3)\,K_0(3,1)\,d\tau_3 \tag{9}$$

ただし今度は, 積分は全ての空間と時間 $d\tau_3 = d^3\boldsymbol{x}_3 dt_3$ に及ぶ．$t_2 < t_1$ の場合には $K_0(2,1) = 0$ と定義したので, もし t_3 が t_1 から t_2 の範囲外であるならば, 自動的にその寄与はゼロである．

式 (6) 及び式 (9) の結果は, 次のように解釈することが出来る．粒子は自由粒子として点から点へと移動するが, ポテンシャル U によって散乱されるとイメージすることが出来る．従って 1 から 2 に到着する際の全振幅は, 様々な代替ルートの振幅の合計と考えることが出来る．粒子は 1 から 2 へ直接に行くことが出来る (振幅 $K_0(2,1)$ で表され, それは式 (6) のゼロ次の項を与える)．また, 粒子は 1 から 3 へ行き (振幅 $K_0(3,1)$), ポテンシャルによって散乱され (散乱振幅は単位体積単位時間当たり $-iU(3)$ である), その後 3 から 2 へ行く (振幅 $K_0(3,1)$ である) ことも出来る (図 1 の (a) を見よ)．これは任意の点 3 で起きるので, これらの代替点について和を取れば式 (9) となる．

ここでも, ポテンシャルによって 2 回散乱することがある (図 1(b) を見よ)．1 から 3 に進み ($K_0(3,1)$), そこで散乱され ($-iU(3)$), その後, 空間的に別の地点である 4 に進み (振幅 $K_0(4,3)$), 再び散乱され ($-iU(4)$), 2 に進む ($K_0(2,4)$)．3, 4 の全ての可能な場所と時間で足し合わせると, 全振幅への 2 次の寄与 $K^{(2)}(2,1)$ は次となる：

$$(-i)^2 \iint K_0(2,4)U(4)K_0(4,3)U(3)K_0(3,1)\,d\tau_3\,d\tau_4 \tag{10}$$

これは式 (9) のときと全く同様に, 式 (1) から直接容易に証明することが出来る．このようにして, 展開式 (6) のどの項でも明らかに書き下すことが出来る[*5]．

[*103] [訳註] 式 (8.b) を t_3 で積分したものと式 (2) とから,

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(2) &= -i\int dt_3 \iint K_0(2,3)U(3)K_0(3,1)\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1\,d^3\boldsymbol{x}_3 \\
&= \int\left(-i\int dt_3\int d^3\boldsymbol{x}_3 K_0(2,3)U(3)K_0(3,1)\right)\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1 \\
&= \int K^{(1)}(2,1)\,\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1 \\
\therefore\quad K^{(1)}(2,1) &= -i\int dt_3\int d^3\boldsymbol{x}_3 K_0(2,3)U(3)K_0(3,1) = -i\int d\tau_3\,K_0(2,3)U(3)K_0(3,1)
\end{aligned}$$

[*5] ($H = H_0 + U$ の場合の (1) と $H = H_0$ の場合の (4) から直接導き出される) 積分方程式を, 逐次近似で解い

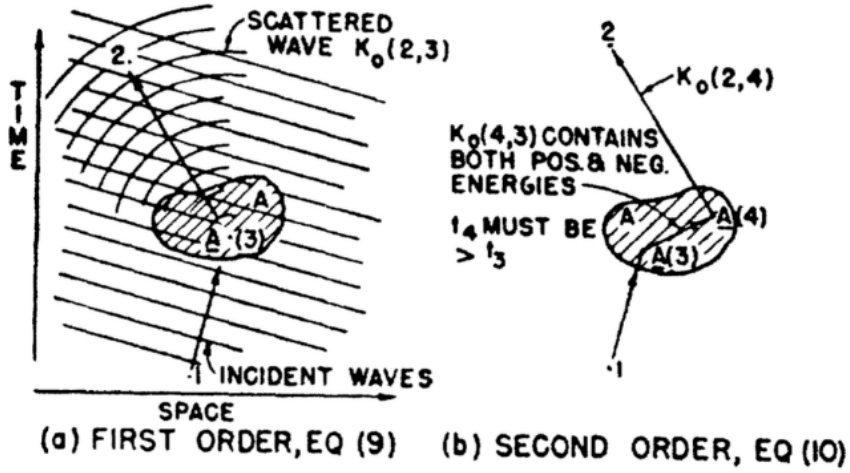

図 1　シュレディンガー (とディラック) 方程式は, 平面波がポテンシャルによって次々と散乱されることを記述しているとイメージすることが出来る．図 (a) は, 1 次での状況を示している．$K_0(2,3)$ は, 点 3 から出発した自由粒子が点 2 に到達するまでの振幅である．斜線部分はポテンシャル A の存在を示しており, 3 では $/\mathrm{cm}^3\mathrm{sec}$ 当たり $-i\boldsymbol{A}(3)$ の振幅で散乱する (式 (9))．図 (b) は, 3 で散乱した波が 4 で再び散乱するという 2 次過程 (式 (10)) を示している．しかし Dirac の 1 電子理論では, $K_0(4,3)$ は正と負のエネルギーを持つ電子が 3 から 4 へ進むことを表している．これは, 異なる散乱カーネル $K_+(4,3)$ を選択することで改善される．

3　ディラック方程式の取り扱い

ここでは, 前節の方法を拡張して Dirac 方程式に適用してみる．前式で必要と思われるのは, H をディラックのハミルトニアンに, そして ψ を (各粒子に対して)4 つの添字を持つシンボルマークと考えることだけである．すると K_0 は依然として式 (3) または式 (4) で定義することが出来る．それは今や, 初期波動関数に作用して終状態の波動関数を与える 4-4 行列である．式 (10) の $U(3)$ は一般化されて $A_4(3) - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A}(3)$ となる．ただし A_4 及び $\boldsymbol{A}$ は, スカラー

ているだけである：

$$\psi(2) = -i\int K_0(2,3)U(3)\psi(3)\,d\tau_3 + \int K_0(2,1)\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1,$$

ただし最初の積分範囲は, 全ての空間に, そして第 2 項に現れる t_1 よりも大きな (後の) 全時間 t_3 に及んでいる．そして $t_2 > t_1$ である．

ポテンシャルとベクトルポテンシャル (に電子電荷 e を掛け合わせたもの) であり，$\boldsymbol{\alpha}$ はディラック行列である．

このことを議論するために, 便利な相対論的表記を定義しようと思う．$\boldsymbol{x}, t$ のような 4-ベクトルを記号 x_μ で表現する．ただし $\mu = 1, 2, 3, 4$ そして $x_4 = t$ は実数である．従って, ベクトルポテンシャル及びスカラーポテンシャル (に e を掛けたもの) $\boldsymbol{A}$ と A_4 は A_μ である．4-行列 $\beta\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は, 4-ベクトル γ_μ として変換すると考えることが出来る．(ここの γ_μ は, パウリのそれと $\mu = 1, 2, 3$ のとき因子 i だけ異なっている)．次の縮約規則 (summation convention)

$$a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

を用いる．特に a_μ が任意の 4-ベクトル (しかし行列ではない) である場合は $\boldsymbol{a} = a_\mu \gamma_\mu$ と書き[*104]，$\boldsymbol{a}$ がベクトルに関連付けられた行列であることを示す ($\boldsymbol{a}$ は a_μ の代わりにベクトルを表わすシンボルマークとしてよく用いる)．γ_μ は次を満たす：

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

ただし $\delta_{44} = +1$,$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1$ そして他の $\delta_{\mu\nu}$ はゼロである．縮約規則の結果として $\delta_{\mu\nu} a_\nu = a_\mu$ そして $\delta_{\mu\mu} = 4$ である．$\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba} = 2a \cdot b$ そして $\boldsymbol{a}^2 = a_\mu a_\mu = a \cdot a$ は純粋な数値であることに注意する．$\partial/\partial\mu$ は $\mu = 4$ では $\partial/\partial t$ そして $\mu = 1, 2, 3$ では $-\partial/\partial x$, $-\partial/\partial x$,$-\partial/\partial y$,$-\partial/\partial z$ を意味する．∇ は次とする：

$$\nabla \equiv \gamma_\mu \partial^\mu = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

以下では、純粋に相対論的な便宜のために, (3) の ϕ_n^* はそのアジョイント $\overline{\phi} = \phi_n^* \beta$ に置き換えて考えることにする．

従って, 外場 $\boldsymbol{A} = A_\mu \gamma_\mu$ 中の質量 m の粒子に対するディラック方程式は,

$$\big(i\nabla - m\big)\psi = \boldsymbol{A}\psi \tag{11}$$

となり, そして自由粒子の伝搬を決定する式 (4) は次となる：

$$\big(i\nabla_2 - m\big)K_+(2,1) = i\delta(2,1) \tag{12}$$

ここで ∇_2 の添字 2 は, $K_+(2,1)$ と $\delta(2,1)$ 中の 2 で表される座標 $x_{2\mu}$ について微分することを示している．

[*104] [訳註] 現代の教科書では，$\boldsymbol{a} = \gamma_\mu a_\mu$ を $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{a}$ と表現しているので注意する．

関数 $K_+(2,1)$ は場が存在しない状態で定義される．もしポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が類似の関数に作用するならば, 例えば $K_+^{(A)}(2,1)$ を定義することが出来る．それは, 式 (9) に類似した 1 次の補正, 即ち

$$K_+^{(1)}(2,1) = -i \int K_+(2,3)\boldsymbol{A}(3)K_+(3,1)\, d\tau_3 \tag{13}$$

だけ $K_+(2,1)$ と異なっている．これは, 自由粒子として 1 から 3 へ移動しそこでポテンシャル (ここでは $U(3)$ ではなくて行列 $\boldsymbol{A}(3)$ である) によって散乱され, 引き続き 2 へ自由粒子として移動する場合の振幅を表している．式 (10) と同様の 2 次補正を行うと,

$$K_+^{(2)}(2,1) = -\iint K_+(2,4)\boldsymbol{A}(4)K_+(4,3)\boldsymbol{A}(3)K_+(3,1)\, d\tau_4\, d\tau_3 \tag{14}$$

といった具合になる．一般に $K_+^{(A)}$ は次式を満たす：

$$\big(i\nabla_2 - \boldsymbol{A}(2) - m\big)K_+^{(A)}(2,1) = i\delta(2,1) \tag{15}$$

そして項 (13),(14) に続く項たちは, 次の積分方程式の冪級数となる：

$$K_+^{(A)}(2,1) = K_+(2,1) - i \int K_+(2,3)\boldsymbol{A}(3)K_+^{(A)}(3,1)\, d\tau_3 \tag{16}$$

これも式 (15) を満たしている．

ここで, 式 (12) の特別な解として, $K_0(2,1)$ が $t_2 < t_1$ では消失し $t_2 > t_1$ では式 (3) で与えられる $K_+ = K_0$ を選ぶことが期待される．ただし, 式 (3) の ϕ_n と E_n はディラック方程式を満たす粒子の固有関数と固有値であり ϕ_n^* は $\bar{\phi}_n$ で置き換える．

しかし, この選択から得られる公式は, 陽電子の正孔理論ではなく, ディラックの 1 電子理論に適用されるという欠点がある．例えば, 図 1(a) のように, 時空間の小さな領域 3 でポテンシャルによって散乱された後の電子を考えて見よう．1 電子理論では ($K_+ = K_0$ とした場合の式 (3) と同様に), 別の点 2 での散乱振幅は正の時間に向かって, 正負両方の位相変化率で進むことになる．散乱した時間より以前の時間の方へ散乱する波は存在しない．$K_0(2,3)$ の特性があるだけである．一方, 陽電子理論によれば, 負のエネルギー状態は散乱後の電子には無効である．従って $K_+ = K_0$ とする選択は満足のいくものではない．しかし, 式 (12) の解は他にも存在する．$K_+(2,1)$ の定義が「**正のエネルギー状態のみで (3) の和をとったものが $t_2 > t_1$ のときの $K_+(2,1)$ である**」とする解を選択しよう．さて, 表現が完全であるためには, この新しい解は全ての時間で式 (12) を満たさなければならない．従って, それは古い解 K_0 と同次の Dirac 方程式の解だけ異なるものでなければならない．定義から明らかなように, 時間が

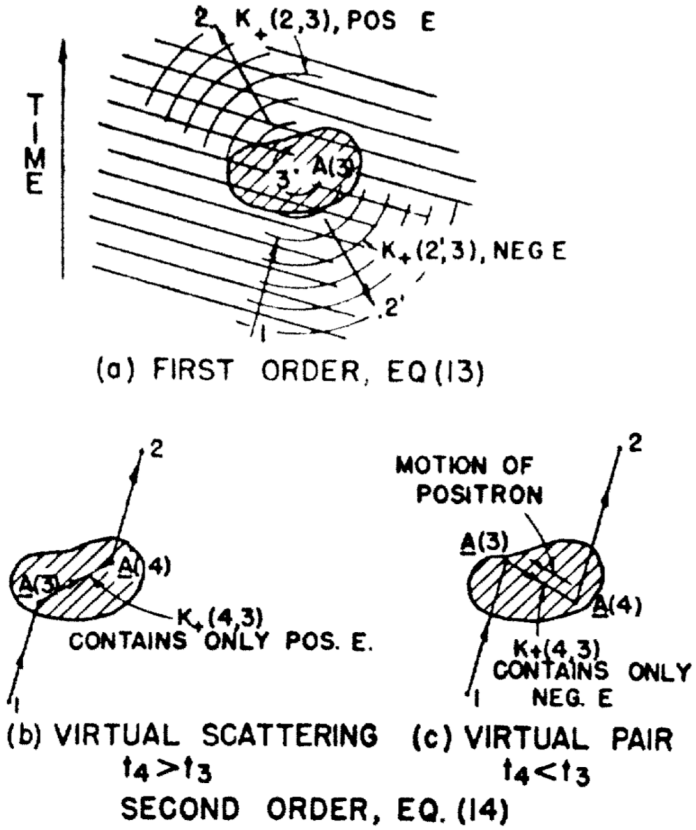

図 2　ディラック方程式は, ポテンシャルによって散乱された波が図 (a) のように時間を逆行して進むと考えれば, $K_+(2,1)$ という別の解を許す．これを 2 次過程 (b),(c) で解釈すると, (c) では 4 で仮想ペアが生成され, 陽電子は 3 に行って消滅する可能性があることに注目する．これは, 電子が 3 から 4 へ時間的に逆向きに散乱されることを除けば, 通常の散乱 (b) と同様に考えることが出来る．(a) の 3 から $2'$ への散乱波は $2'$ から 3 に陽電子が到達し, 1 からの電子を消滅させる可能性を表している．この描像は, 時間的に逆行する電子を陽電子と認識する正孔理論と同等であることが証明されている．

$t_2 > t_1$ である限り, 差 $K_0 - K_+$ は, 全ての負エネルギー状態について式 (3) の和をとったものとなる．しかしこの差は, 全ての時間での同次のディラック方程式の解でなければならない．従ってそれは, $t_2 < t_1$ の場合の負エネルギー状態について同じ和をとったものでもあるべきである．この場合 $K_0 = 0$ なので, 新しい核 $K_+(2,1)$ は「**$t_2 < t_1$ の場合では負エネルギー状態**

について式 (3) の和をとったものである」ことになる．すなわち[*105],

$$K_+(2,1) = \sum_{POS\ E_n} \phi_n(2)\bar{\phi}(1)\exp\{-iE_n(t_2-t_1)\} \quad \text{for} \quad t_2 > t_1$$
$$= -\sum_{NEG\ E_n} \phi_n(2)\bar{\phi}(1)\exp\{-iE_n(t_2-t_1)\} \quad \text{for} \quad t_2 < t_1 \tag{17}$$

このように K_+ を選択すると, 式 (13) や式 (14) のような方程式は, 今や陽電子の正孔理論と同等な結果を与えるであろう．

例えば, 式 (14) が陽電子理論に基づいて最初 1 に居た電子が 2 で見出される正確な 2 次の表現であることは, 以下のようにして知ることが出来る (図 2)．特殊な例として, $t_2 > t_1$ であり, 区間 $t_2 - t_1$ 以外ではポテンシャルが消滅し, 従って t_4 と t_3 が共に t_1 と t_2 の間にあると仮定しよう．

最初は $t_4 > t_3$ とする (図 2(b))．すると ($t_3 > t_1$ なので), 最初は正のエネルギー状態にあると仮定した電子は, その状態で位置 3 へ伝搬し ($K_+(3,1)$ による), そこで散乱される ($\boldsymbol{A}(3)$ による) と考えられる．電子は, その後 4 へと進むが, その時は正エネルギー電子として振る舞うべきである．これは式 (14) で正しく記述されている．なぜなら, $K_+(4,3)$ は $t_4 > t_3$ なので, 級数展開したときに正のエネルギー成分だけを含むからである．4 で散乱された後, それは 2 へと前進する．やはり必然的に正のエネルギー状態である．なぜなら $t_2 > t_4$ だからである．

陽電子理論では, 仮想ペアの生成の可能性があるので, それによる付加的な寄与が存在する (図 2(c))．4 に於けるポテンシャル $\boldsymbol{A}(4)$ によってペアが生成される可能性があり, ペアの電子は後に 2 で見つかったものである．陽電子 (もっと正確に言えば正孔) は 3 に進み, そこで陽電子は, 1 からそこへやって来た電子を消滅させる．

この選択肢は $t_4 < t_3$ の場合の寄与として式 (14) にすでに含まれており, これを検討することで $t_4 < t_3$ の場合の $K_+(4,3)$ の解釈が導かれる．$K_+(2,4)$ という因子は,(4 でペアが生成された後の) 電子が 4 から 2 へ進む様子を表している．同様に, $K_+(3,1)$ は電子が 1 から 3 へ進む様子を表している．従って $K_+(4,3)$ は陽電子すなわち正孔が 4 から 3 へ伝搬する様子を表していなければならない．そのようになっていることは明らかである．正孔理論では正孔が負エネルギーの電子のように進行するという事実は, $t_4 < t_3$ の $K_+(4,3)$ が負のエネルギー成分のみの総和 (のマイナス) であることに反映されている．正孔理論では, これらの中間状態の実質的なエネルギーはもちろん正である．それはここでもそうである．なぜなら, 式 (17) に於いて $K_+(4,3)$ を定義している位相 $\exp\{-iE_n(t_4-t_3)\}$ では, E_n は負であるが (t_4-t_3) も負

[*105] [訳註] このとき, 何方の場合でも $E_n(t_2-t_1) > 0$ となることに注意する．

だからである．すなわち, 中間状態のエネルギーが $|E_n|$ である場合にそうであるように, 寄与は t_3 に対し $\exp\{-i|E_n|(t_3-t_4)\}$ として変化する．$K_+(4,3)$ を計算する際に全体の和を負にしているのは, 正孔理論ではパウリの原理により振幅の符号が反転すること, そして 2 に到着した電子は海の中の電子と交換されていることの反映である[*6]．この仕方によって, 仮想ペアが関係する全ての過程は 2 次まで, そしてより高次の段階まで正しく記述される．

式 (14) のような表現を,「電子が 1 から 3 に移動し $(K_+(3,1))$, 3 で $\boldsymbol{A}(3)$ によって散乱し, 4 に進み $(K_+(4,3))$, 再び $\boldsymbol{A}(4)$ によって散乱し, 最終的に 2 に到着する」と描写することも依然として可能である．しかしながら, 散乱は未来にも過去にも向かっている可能性があり, 時間を遡って伝搬する電子は陽電子として認識されることになる．

このことから, ポテンシャル中の散乱によって生じる負のエネルギー成分は, 散乱点から過去に向かって伝播する波と考えられる．そしてそのような波は, ポテンシャル中で電子を消滅させる陽電子の伝搬を表していると考えられる[*7]．

この解釈では, 真の対生成も正しく記述される (図 3 参照)．例えば, 式 (13) では, $t_1 < t_3 < t_2$ の場合, 時刻 t_1 に 1 個の電子が 1 に存在していれば, 時刻 t_2 には 1 個の (3 で散乱された) 電子だけが 2 に存在するという振幅が与えられる．一方, t_2 が t_3 より小さい場合, 例えば $t_2 = t_1 < t3$ の場合は, 同じ式で 1 の電子と 2 の陽電子のペアが 3 で消滅し, その後, 粒子が存在しなくなる振幅を与える．同様にして, t_2 と t_1 が t_3 を超える場合は, 真空から $\boldsymbol{A}(3)$ によって生成された 2 の電子と 1 の陽電子の一対を見出す振幅 (のマイナス) となる．$t_1 > t_3 > t_2$ の場合, 式 (13) は陽電子の散乱を描写する．これらの振幅は全て, 真空が真空のままであることを記述する振幅 (その振幅は 1 とする) と同類である．(このことは, 後でより詳しく議論する)．

式 (2) に類似したものは簡単に算出できる．それは,

$$\psi(2) = \int K_+(2,1)\boldsymbol{N}(1)\psi(1)\, d^3V_1, \tag{18}$$

ただし d^3V_1 は点 2 を含む時空領域の閉じた 3 次元表面の体積要素であり, そして $N(1)$ は,

[*6] よく指摘されることだが, 1 電子の理論では, この過程の行列要素が正孔理論と同じになるようである．問題は解釈の問題であって, 特に他の過程, 例えば自己エネルギーに対しても正しい結果を与えるように解釈することである．

[*7]「陽電子は真の時間に対して固有時を反転させた電子として表現できる」というこの考えは, 筆者をはじめとする人々, 特に Stückelberg によって議論されてきた．E. C. C. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **15**, 23 (1942); R. P. Feynman, Phys. Rev. **74**, 939 (1948)．古典力学的に, 作用 (固有時) は軌道をたどるにつれて連続的に増加するという事実は, 量子力学においては, 粒子がある散乱点から次の散乱点へと進むにつれて, 位相, それは $|E_n||t_2-t_1|$ である, が常に増加するという事実に反映される．

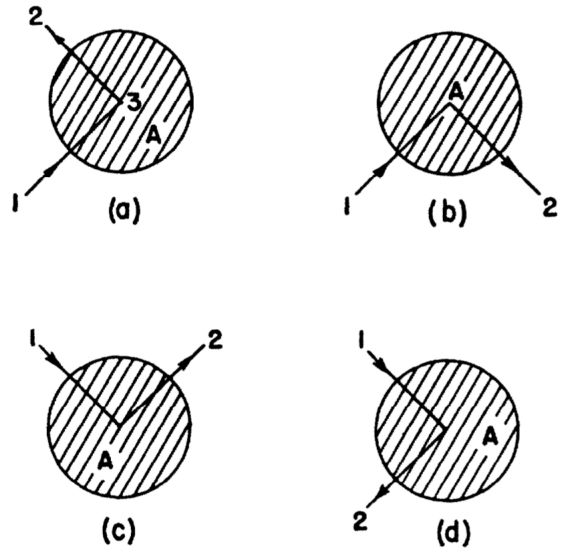

図 3　変数 t_2,t_1 の時間関係によって, いくつかの異なる過程を同じ式で記述することが出来る．従って $P_v|K_+^{(A)}(2,1)|^2$ は, 以下の確率である：(a) 1 の電子が 2 で散乱する (真空中で他のペアは形成されない)．(b) 1 の電子と 2 の陽電子が対消滅して何も残らない．(c) 真空中から 1 と 2 のペアが一つ作られる．(d) 2 の陽電子が 1 に散乱する．($K_+^{(A)}(2,1)$ は, ポテンシャルにおける散乱の効果を全オーダーに渡って合計したもの．P_v は規格化定数である).

$\boldsymbol{N}_\mu(1)$ を点 1 の表面に**内向きに**引かれた単位法線としたとき $N_\mu(1)\gamma_\mu$ である．つまり, 波動関数 $\psi(2)$ (この場合は自由粒子の波動関数) は, もし 4 次元領域表面での値を指定すれば, その領域内の任意の点で決定される．

これを解釈するために, 3 次元表面が本質的に, 時刻 t_2 より以前のある時間 $t=0$ での全空間, そして時間 $T>t_2$ の全空間からなる場合を考えよう．これらを結んで完全な閉曲面となる円柱は $\boldsymbol{x}_2$ から非常に離れているので, ($K_+(2,1)$ が空間的方向に指数関数的に減少するため) 評価できるほどの寄与はないかもしれない．従って $\gamma_4=\beta$ とすると, 内側に引いた法線 N が β と $-\beta$ になるので,

$$\psi(2)=\int K_+(2,1)\beta\,\psi(1)\,d^3\boldsymbol{x}_1-\int K_+(2,1')\beta\,\psi(1')\,d^3\boldsymbol{x}_{1'} \tag{19}$$

ただし $t_1=0, t_{1'}=T$ である．$\psi(1)$ の正エネルギー成分 (電子) のみが第 1 の積分に寄与し, そして $\psi(1')$ の負エネルギー成分 (陽電子) のみが第 2 の積分に寄与する．つまり 2 の電荷を見出す振幅は, 測定前の電子を見出す振幅と測定後の陽電子を見出す振幅の両方によって決定

されるのである．このことは, 一つの電荷しか関与しない問題でも「2 に於ける電荷を見出す振幅は, それ以前の時点で分かっているのが振幅の内の電子 (または陽電子) を見出す振幅だけである場合には, 決定されない」という意味に解釈できる．最初は電子が存在しなかった可能性があり, 測定中に (あるいは他の外場によって) ペアが作られたかも知れないのである．その偶発に対する振幅 (amplitude for this contingency) は, 将来に陽電子を見出す振幅によって特定される．

我々はまた, 式 (5) のような遷移振幅 (transition amplitude) の式を得ることも出来る．例えば, 時刻 $t = 0$ で電子が (正エネルギーの) 波動関数 $f(\boldsymbol{x})$ の状態で存在していた場合, 時刻 $t = T$ で (正エネルギーの) 波動関数 $g(\boldsymbol{x})$ の状態の電子を見出す振幅はどれだけであろうか？．$t = 0$ 以降に電子をどこかで見出す振幅は $\psi(1)$ を $f(\boldsymbol{x})$ に置き換えた式 (19) で与えられ, 2 番目の積分はゼロとなる．従って, 状態 $g(\boldsymbol{x})$ に電子を見出す遷移要素 (transition element) は, 単に式 (5) と同様に考えればよいだけであるが $g^* = \bar{g}\beta$ であるので,

$$\begin{aligned}\langle g|1|f\rangle &= \int d^3\boldsymbol{x}_2\, g^*(2)\psi(2) = \int d^3\boldsymbol{x}_2\, \bar{g}(2)\beta \int K_+(2,1)\beta f(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \\ &= \int \bar{g}(\boldsymbol{x}_2)\beta K_+(2,1)\beta f(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_2\, d\tau_3 \end{aligned} \tag{20}$$

ただし $t_2 = T$,$t_1 = 0$ である．

ポテンシャルが 0 と T の区間のどこかで作用する場合には, K_+ は $K_+^{(A)}$ に置き換わる．従って, 遷移振幅の 1 次の影響は式 (13) から次である[*106]：

$$\begin{aligned}\lambda_{gf}^{(1)} &= \int d^3\boldsymbol{x}_2\, g^*(2)\Delta\psi(2) = \int d^3\boldsymbol{x}_2\, \bar{g}(\boldsymbol{x}_2)\beta \int K_+^{(1)}(2,1) f(1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \\ &= -i \int \bar{g}(\boldsymbol{x}_2)\beta K_+(2,3)\boldsymbol{A}(3)K_+(3,1)\beta f(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_2\, d\tau_3 \end{aligned} \tag{21}$$

このような表現式は簡単化することが可能であり, 相対論的計算には不便な 3 次元表面積分を, 以下のようにして取り除くことが出来る．ある与えられた時間 $t_1 = 0$ での波動関数 $f(\boldsymbol{x})$ で状態を定義する代わりに, 4 変数 $\boldsymbol{x}_1$, t_1 の関数 $f(1)$ で状態を定義する．それは, 全ての時間 t_1 での自由粒子方程式の解であり, $t_1 = 0$ では $f(\boldsymbol{x}_1)$ である．同様にして, 終状態は全時空に及ぶ関数 $g(2)$ によって定義する．すると,

$$\int K_+(3,1)\beta f(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 = f(3), \quad \int \bar{g}(\boldsymbol{x}_2)\beta K_+(2,3)\, d^3\boldsymbol{x}_2 = \bar{g}(3),$$

[*106] [訳註] 原文では式 (20) 及び式 (21) 中の $d\tau_3$ が抜けているので注意する．

なので, 我々の表面積分は実行することが可能である．その結果は

$$-i\int \bar{g}(3)\boldsymbol{A}(3)f(3)\,d\tau_3, \tag{22}$$

となり, 今や積分は全時空での積分となる．(式 (14) より) 2 次の遷移振幅は,

$$-\iint \bar{g}(2)\boldsymbol{A}(2)K_+(2,1)\boldsymbol{A}(1)f(1)\,d\tau_1\,d\tau_2, \tag{23}$$

この場合, 1 に振幅 $f(1)$ で到着した粒子は散乱され ($\boldsymbol{A}(1)$ による), 次に 2 に進み ($K_+(2,1)$ による), そして再び散乱される ($\boldsymbol{A}(2)$ による)．その後, 粒子が状態 $g(2)$ に在るという振幅を求める．もし $g(2)$ が負のエネルギー状態ならば, $f(1)$ 状態の電子や $g(2)$ 状態の陽電子などが消滅する問題を解いていることになる．

散乱問題を強調して来たが, 明らかに一定なポテンシャル $\boldsymbol{V}$ 中の運動, 例えば水素原子中の運動, もまた扱うことが出来る．これを最初に散乱問題として捉えると, 最初の自由波動関数を持つ電子がポテンシャル $\boldsymbol{V}$ の中で時間的に前方または後方に k 回散乱されて 1 に到達したときの振幅 $\phi(1)$ を求めることが出来る．そして, もう一回散乱した後の振幅は, 次である：

$$\phi_{k+1}(2) = -i\int K_+(2,1)\boldsymbol{V}(1)\phi_k(1)\,d\tau_1 \tag{24}$$

直接, または任意回数の散乱を受けた後で 1 に到達する全振幅 $\psi(1)$ は式 (24) をゼロから無限大までの全ての k について足し合わせることで得ることが出来る：

$$\psi(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(1)$$

この全振幅の方程式は次である：

$$\psi(2) = \phi_0(2) - i\int K_+(2,1)\boldsymbol{V}(1)\psi(1)\,d\tau_1 \tag{25}$$

定常問題として見ると, 例えば, ψ の周期的な運動を導出する初期条件 ϕ_0(または出来れば ψ そのもの) を見つけたいと思うかも知れない．これは, 勿論だが, 次のディラック方程式を解くことでより実践的に行うことが出来る：

$$\begin{aligned}(i\nabla_2 - m)\psi(2) &= (i\nabla_2 - m)\phi_0(2) - i\int (i\nabla_2 - m)K_+(2,1)\boldsymbol{V}(1)\psi(1)\,d\tau_1 \\ &= -i\int i\delta(2,1)\boldsymbol{V}(1)\psi(1)\,d\tau_1 = \boldsymbol{V}(2)\psi(2), \\ \therefore\qquad (i\nabla_2 - m)\psi(2) &= \boldsymbol{V}(2)\psi(2)\end{aligned} \tag{26}$$

この式は, 式 (25) の両辺に $i\nabla_2 - m$ を作用させ, それによって ϕ_0 を消去し, そして式 (12) を用いることで導出されたものである．この式は視点の関係を示している[*107].

多くの問題で, 全ポテンシャル $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{V}$ は便宜的に, 一定な部分 $\boldsymbol{V}$ と, 摂動と見做す別の部分 $\boldsymbol{A}$, とに分離することが出来る．もし $K_+^{(V)}$ が $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{A}$ とする式 (16) のように定義されるなら, 式 (23) のような表式は正当であり, そして K_+ を $K_+^{(V)}$ で置き換え, また関数 $f(1), f(2)$ は,(自由粒子の波動関数と言うよりは) ポテンシャル $\boldsymbol{V}$ 中のディラック方程式 (26) の全時空での解で置き換える.

4 幾つかの電荷を含む問題

次に，(仮想状態で生成されるペアに追加して) 2 つまたはそれ以上の別個の電荷が存在する場合を考えてみよう．そのような電荷間の相互作用については次の論文で議論する．ここでは「電荷は相互作用しない」と仮定する．この場合, 各粒子は他の粒子とは独立に振る舞う．2 つの粒子 a と b がある場合, 粒子 a は t_1 で $\boldsymbol{x}_1$ であったのが t_3 で $\boldsymbol{x}_3$ になり, 粒子 b は t_2 で $\boldsymbol{x}_2$ であったのが t_4 で $\boldsymbol{x}_4$ になる, という振幅は次の積となる：

$$K(3,4;1,2) = K_{+a}(3,1)K_{+b}(4,2)$$

a, b という記号は, K_+ に現れる行列が, 粒子 a または b にそれぞれ対応する Dirac の 4 成分スピノルに適用されることを単純に示している (波動関数はこのとき 16 の添字を持つ)．ポテンシャル中では, K_{+a} と K_{+b} は $K_{+a}^{(A)}$ と $K_{+b}^{(A)}$ となり，$K_{+a}^{(A)}$ は単一粒子の場合と同様に定義され計算される．それらは可換である．よって以降では a, b は省略できる；核に出現する時空変数が, それらが何に対して作用するかが十分に定義されるからである.

しかしながら, 粒子たちは同一であって排他原理を満たすものである．この排他原理では $K(3,4;1,2) - K(4,3;1,2)$ を計算することだけで電荷が点 3,4 に到着する正味の振幅を得ることが出来る．(ただしその振幅は正規化されることが仮定されており, 例えば点 3 と点 4 に於いて積分が実行される場合, 式が表わす電子は同一なので 2 で割り算する)．この式は陽電子に対しても正しいものである (図 4 参照)．例えば,「電子と陽電子が, 最初は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_4 (t_1 = t_4$ としよう) で検出され, その後 (時刻 $t_2 = t_3 > t_1$ で) 点 $\boldsymbol{x}_3$ と $\boldsymbol{x}_2$ で発見される」振幅は, 次式のような同じ表現で与えられる：

$$K_+^{(A)}(3,1)K_+^{(A)}(4,2) - K_+^{(A)}(4,1)K_+^{(A)}(3,2) \tag{27}$$

[*107] [訳註] 式 (26) は, 題意に従って修正してあるので注意する.

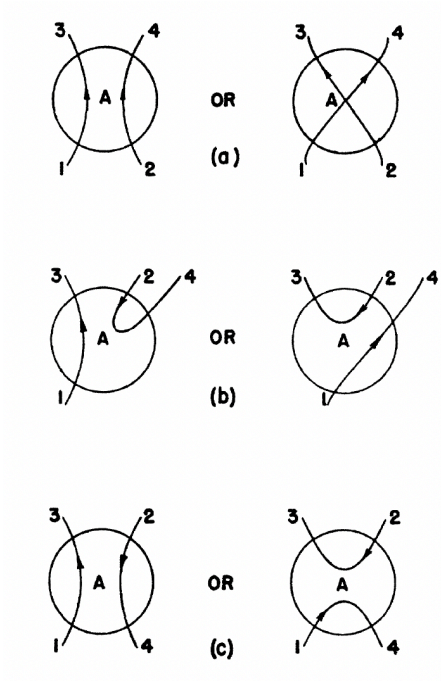

図 4　2 つの区別可能な電荷を含んだ (それらが生成できる仮想ペアも付け加えた) 幾つかの問題．$P_v|K_+^{(A)}(3,1)K_+^{(A)}(4,2)-K_+^{(A)}(4,1)K_+^{(A)}(3,2)|^2$ が次の確率である：(a) 1 と 2 の電子が 3 と 4 へ散乱される (そしてペアは生成されない)．(b) 1 で電子が出発し 1 個のペアが生成される．陽電子は 2 に, 電子は $3,4$ にある．(c) $1,4$ のペアが $3,2$ で見い出される, 等々．排他原理は,「2 つの電子の交換を含む過程の振幅たちは引き算されるべきこと」を要求する．

第 1 項は電子が 1 から 3 へ, 陽電子が 4 から 2 へ進む振幅を表し (図 4(c)), 第 2 項は 1 と 4 でのペアが消滅し 3 と 2 で見つかるのはポテンシャルで新たに作られたペアであるという干渉振幅を表している．複数の粒子への一般化は明らかである．各粒子には追加の係数 $K_+^{(A)}$ があり, 反対称の組み合わせが常に取られる．中間状態では排他原理を考慮する必要はない．例として $t_2 > t_1$ の式 (14) をもう一度考え $t_4 < t_3$ としよう．すると図 2(c) のように, 点 4 でペアが作られ, 電子は 2 に進み, 陽電子は 3 に進み, 点 1 から来た電子を消滅させるという状況になる．もし 4 で作られた電子が 1 から来た電子と同じ状態であるならば, 排他原理のために反応は起こらず, 式 (14) の項に含めるべきではなかったと反論されるかもしれない．しかし, 排他原理を考慮するには別の変更が必要であり, これがその量を復活させてしまうことが分かる．

なぜなら, 我々は t_1 での真空が t_2 でも真空であるという振幅に対する相対的な振幅を計算しているからである．我々の興味は「1 に電子が存在することに依るこの振幅の変化」である．

ここで, 真空中で起こる現象として「4 でペアが生成され, その後 3 で**同じ**ペアが再び消滅する過程」が考えられる (この過程を「閉ループ経路」と呼ぶことにする). しかしもし本物の電子が, ある状態 1 に存在するとしたら, 真空中で電子が状態 1 で生成されるペアは除外されるべきである. 従って, この過程に対応する項は相対的な振幅から差し引かなければならない. しかしこれは, 式 (14) に含めるべきではないと主張されていた量を, K_+ の定義から必要なマイナス記号を自動的に付けているに過ぎない. 中間状態において排他律を完全に無視する方が明らかに単純である.

すべての振幅は相対的なもので, その 2 乗がさまざまな現象の相対的な確率を与える. 絶対確率は, それぞれの確率に P_v を掛けたもので, 最初に粒子が存在しない場合, 最終的に粒子が存在しない真の確率である. この量 P_v は, すべての互いに排他的な選択肢の確率の和が 1 になるように, 相対確率を正規化することによって計算できる. (例えば, 真空から出発した場合, 真空のままである (値 1) か, 一対が作られるか, 二対が作られるか, などの相対確率を計算できる. その合計は P_v^{-1} である). この形にすれば理論は完全であり, 発散の問題はない. 実の過程は, 真空で起こっている事とは全く無関係である.

5 真空の問題

絶対振幅を得る他の方法は, 真空から真空への振幅, 即ち, 始状態と終状態の両方で粒子が存在しないという絶対振幅 C_v を, 全ての振幅に掛け合わせることである. もしその区間の間にポテンシャルが無い場合は $C_v = 1$ と仮定出来る. そうでない場合の C_v は以下のようにして計算する. それは 1 ではない. なぜなら, 例えば, ペアが生成されるが, そのペアはその後で再び自ら消滅し得るからである. そのような経路は時空ダイアグラム上に閉じたループとして出現するであろう. そのような閉じた単ループの振幅の全ての和を L と呼ぶことにする. 1 次近似で L は次となる[*108]:

$$L^{(1)} = -\frac{1}{2}\iint Sp[K_+(2,1)\boldsymbol{A}(1)K_+(1,2)\boldsymbol{A}(2)]\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{28}$$

一対のペアが例えば 1 で生成し得た場合, その電子と陽電子は共に 2 に移動しそこで消滅し得る. そのペアに対し可能な全てのスピンの和を取らなければならないので, 跡和 (トレース) Sp が取られている. 因子 1/2 が生じるのは, 同一のループがどちらのポテンシャルからも出発するとして考えてしまうためである. そして負符号は, 相互作用素 (interactor) は各々 $-i\boldsymbol{A}$

[*108] [訳註] Sp は Spur 即ちトレース (trace) を意味する.

だからである．次のオーダーの項は,

$$L^{(2)} = +\frac{i}{3}\iint Sp[K_+(2,1)\boldsymbol{A}(1)K_+(1,3)\boldsymbol{A}(3)K_+(3,2)\boldsymbol{A}(2)]\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3,$$

などである[*9]．このような項の全てを足し合わせると L となる[*10]．

これらの単一ループに加えて, 2つの独立したペアが生成され, 各々のペアが再び自己消滅する可能性がある．つまり真空中に2つの閉じたループが形成される可能性があり, この選択肢からの振幅の寄与は, 単体で考えた各々のループからの寄与の積に過ぎない．このようなループのペア (しかし, これらの仮想状態に対して排他律を無視することは矛盾していない) からの寄与の合計は, L^2 に於いてループのペアを2回数えるので $L^2/2$ となる．真空-真空の全振幅は次のようになる：

$$C_v = 1 - L + \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} + \cdots = \exp(-L), \tag{30}$$

連続する各項は, ゼロループ、1ループ、2ループ等々からの振幅を表わしている．単一ループの C_v への寄与が $-L$ であることは Pauli の排他原理の帰結である．例えば, 2つの粒子ペアが作られる状況を考えてみよう．そしてこれらのペアは後に2つのループを持つように自己消滅する．電子たちは, ある時点で互いに交換し合うことで1つのループが8の字ようなものを形成することが可能である．交換によって寄与の符号を変えなければならないということは, C_v の項が交互に符号を変えて現れることが必要である．(ペア生成の振幅が $+K_+$ ではなく $-K_+$ であることについても, 同じ仕方で排他律が関係している)．対称的な統計であれば, 次式となるであろう：

$$C_v = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \cdots = \exp(+L)$$

[*9] この項は, 実際には次のようにして消滅してしまう．任意の跡和に於いて, 全てのガンマ行列の符号を反転させることが出来る．$K_+(2,1)$ のガンマの符号を反転させるとそれを $K_+(1,2)$ の転置に変換するので, 全ての因子と変数の順序が逆になる．積分は τ_1, τ_2,τ_3 の全てについて行われるので, これは何の影響も与えない．そして $\boldsymbol{A}$ の符号を変えることで $(-1)^3$ が残る．従って, 跡和はその負に等しくなる．ポテンシャルの相互作用素数が奇数であるループはゼロを与える．これは物理的には, 各々のループで電子が一方向に回ったり逆方向に回ったりするので, これらの振幅を足さなければならないからである．しかし, 電子の動きを反転させると電子は正電荷のように振る舞うので, 各ポテンシャル相互作用の符号が変わり, 相互作用の数が奇数であれば和はゼロになる．この定理は、W. H. Furry, Phys. Rev. 51, 125 (1937) による．

[*10] L を $K_+^{(A)}$ で表わした閉じた式は, 第 n 項に係数 $(1/n)$ があるために得るのが難しい．しかし L の摂動, すなわちポテンシャル $\Delta\boldsymbol{A}$ の微小変化による ΔL は簡単に表現できる．$\Delta\boldsymbol{A}$ が n 個のポテンシャルの何れにも現れ得るという事実から,$(1/n)$ は打ち消される．式 (13) と式 (14) で n 個の和をとり, 式 (16) を用いると, 次の結果となる：

$$\Delta L = -i\int Sp[K_+^{(A)}(1,1) - K_+(1,1)\Delta\boldsymbol{A}(1)]\,d\tau_1 \tag{29}$$

項 $K_+(1,1)$ は, 実際には積分によってゼロになる．

この量 L は ($L^{(1)}$ により) 無限大の虚数部を持っている (より高次の項は有限である)．次の論文では, これを真空偏極との関係で議論する．このことは, 式 (30) から得られる式

$$P_v = |C_v|^2 = \exp\big\{ -2 \cdot [\text{real part of } L]\big\}$$

で与えられる「真空が真空に留まる確率」の正規化定数に何の影響も与えない．この値は, 繰り込み確率によって直接的に計算される値と一致する．L の実数部が正であることが, ディラック方程式の結果と K_+ の特性から帰結されるので、P_v は 1 よりも小さい．ボーズ統計では $C_v = \exp(+L)$ となり, その結果 P_v の値は 1 よりも大きくなってしまう．もしその量がここで為された様に解釈されるならば, それは無意味なものに思われる．K_+ の選択は, 明らかに排他原理を必要としているのである．

Klein-Gordon 方程式に従う電荷は, ここで Dirac 電子について議論した方法で同様に扱うことが出来る．その方法については, 次の論文で詳しく述べる．Klein-Gordon 方程式では L の実部が負になるので, この場合では, 整合性のためにボーズ統計が要求されるようである．

6 エネルギー運動量 表示

幾つかの問題に於ける行列要素の実際的な評価は, 時空間でなく運動量とエネルギーで作業する方がしばしば簡単になる．その理由は, 関数 $K_+(2,1)$ がかなり複雑であるけれども, そのフーリエ変換は非常に簡単な形, 即ち $(i/4\pi)(\boldsymbol{p}-m)^{-1}$ であるので,

$$\begin{aligned} K_+(2,1) &= \frac{i}{4\pi^2}\int \frac{1}{\boldsymbol{p}-m}\exp(-ip\cdot x_{21})\,d^4p \qquad (31)\\ \text{where}\quad & p\cdot x_{21} = p\cdot x_2 - p\cdot x_1 = p_\mu x_{2\mu} - p_\mu x_{1\mu}, \quad \boldsymbol{p} = p_\mu\gamma_\mu,\\ & d^4p = \frac{1}{(2\pi)^2}dp_1dp_2dp_3dp_4 \end{aligned}$$

ただし, 積分は全ての p に渡って行う．これが正しいことは式 (12) からすぐに分かることである．なぜなら, 演算子 $i\nabla - m$ のエネルギー (p_4) と運動量 ($p_{1,2,3}$) 空間での表現は $\boldsymbol{p}-m$ であり $\delta(2,1)$ のフーリエ変換は定数だからである．逆行列 (reciprocal matrix) である $(\boldsymbol{p}-m)^{-1}$ は $(\boldsymbol{p}+m)(\boldsymbol{p}^2-m^2)^{-1}$ と解釈することが出来る．なぜなら $\boldsymbol{p}^2-m^2 = (\boldsymbol{p}-m)(\boldsymbol{p}+m)$ は純粋な数値であり γ 行列は含んでいないからである．従って, 望むなら次の様に書くことが出来る：

$$K_+(2,1) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int \frac{\boldsymbol{p}+m}{\boldsymbol{p}^2-m^2}\exp(-ip\cdot x_{21})\,d^4p = i(i\nabla_2+m)I_+(2,1)$$

ただし,

$$I_+(2,1) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{\boldsymbol{p}^2 - m^2}\exp(-ip\cdot x_{21})\,d^4p \tag{32}$$

これは行列演算子ではなくて, 次式を満たす関数である：

$$\Box_2 I_+(2,1) - m^2 I_+(2,1) = \delta(2,1) \tag{33}$$

ただし $\Box_2$ は時空点 2 に於けるダランベール演算子である：

$$\Box_2 = \boldsymbol{\nabla}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}_2 - \left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2 = -\nabla_2\cdot\nabla_2 = -\frac{\partial}{\partial x_{2\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{2\mu}}$$

積分 (31) と (32) はまだ完全に定義されてはいない．なぜなら $\boldsymbol{p}^2 - m^2 = 0$ のとき被積分関数には極が存在するからである．これらの極をどのように評価するかは,「m は無限小の負の虚数部を持つと見做す」というルールで定義することが出来る．すなわち、m を $m - i\delta$ で置き換え, 上から $\delta \to 0$ の極限をとる．これは, まず p_4 で積分して K_+ を算出することを想像してもらえば分かるであろう．$E = +(m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$ とするならば, 積分は必然的に p_4 を

$$\int \frac{1}{p_4^2 - E^2}\exp\{-ip_4(t_2 - t_1)\}\,dp_4$$

として含んでいる．この積分は $p_4 = +E$ と $p_4 = -E$ で極を持っている．m を $m - i\delta$ で置き換えるというのは、E が小さな負の虚数部を持つことを意味する；最初の極は実軸の下に,2 番目の曲は上にある．そこでもし $t_2 - t_1 > 0$ であるならば, 実軸の下の半円を中心に積分路 (contour) を完成させることが出来る．それは $p_4 = +E$ の極から留数 (redisue), すなわち $-\dfrac{1}{2E}\exp[-iE(t_2 - t_1)]$ を与える．もし $t_2 - t_1 < 0$ であると, 上側の半円が採用され, 極で $p_4 = -E$ となる．従って関数は, 式 (17) のもう一つの定義の要求に応じて, 色々な場合に変化する．

式 (12) の他の解は, 別の処方から得られる．例えば, もし因子 $(\boldsymbol{p}^2 - m^2)^{-1}$ 中の p_4 が正の虚数部を持つと考えられるなら、K_+ はディラックの一電子核 K_0 で置き換えられ、$t_2 < t_1$ の場合はゼロとなる．明示的に関数を示すならば、$x_{21\mu} = (\boldsymbol{x}, t)$ として次となる[*11]：

$$I_+(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\delta(s^2) + \frac{m}{8\pi s}H_1^{(s)}(ms) \tag{34}$$

[*11] $I_+(\boldsymbol{x}, t)$ は $\dfrac{1}{2i}(D_1(\boldsymbol{x}, t) - iD(\boldsymbol{x}, t))$ である．ただし D_1 と D は W.Pauli,Rev.Mod.Phys.**13**,203 (1941) によって定義されているものである．

ただし $t^2 > \boldsymbol{x}^2$ の場合は $s = +(t^2 - \boldsymbol{x}^2)^{1/2}$ であり, そして $t^2 < \boldsymbol{x}^2$ の場合は $s = -i(t^2 - \boldsymbol{x}^2)^{1/2}$ である．また $H_1^{(2)}$ は Hankel 関数であり $\delta(s^2)$ は s^2 の Dirac デルタ関数である．関数の漸近的な振舞いは $\exp(-ims)$ であり, 空間的方向で指数関数的に減衰して行く[*12].

この様な変換により式 (22) や (23) の行列要素は容易に解くことが出来る．運動量 $\boldsymbol{p}_1$ の電子の場合, 自由粒子波動関数は $u_1 \exp(-ip_1 \cdot x)$ である．ただし u_1 は Dirac 方程式 $\boldsymbol{p}_1 u_1 = m u_1$ 従って $\boldsymbol{p}_1^2 = m^2$ を満たす定数スピノルである．状態 $\boldsymbol{p}_1, u_1$ から運動量が $\boldsymbol{p}_2$ でスピノルが u_2 の状態へ遷移する場合の行列要素 (22) は、$-4\pi^2 i(\overline{u}_2 \boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}) u_1)$ である．ただし $\boldsymbol{A}$ はフーリエ積分

$$\boldsymbol{A}(1) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}) \exp(-iq \cdot x_1)\, d^4 q$$

に展開したと考え, そして運動量 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$ の成分を選択すると考える．

2 次の項 (23) は次式を u_1 と u_2 で挟んだ行列要素である：

$$-4\pi^2 i \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}) \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q} - m)} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\, d^4 q \tag{35}$$

なぜなら, 運動量 $\boldsymbol{p}_1$ の電子はポテンシャル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})$ から運動量 $\boldsymbol{q}$ を取上げて, 運動量 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}$ で伝搬した (因子 $(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q} - m)^{-1}$ に相当) 後, ポテンシャル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q})$ により再び散乱されて残りの運動量 $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}$ と取上げて総計 $\boldsymbol{p}_2$ となるからである．$\boldsymbol{q}$ は全ての値が可能なので, 運動量 $\boldsymbol{q}$ について積分を行う．

この同じ行列が, 陽電子問題に直接適用される．例えば，$\boldsymbol{p}_1$ の時間成分が負の場合, 状態は 4 元運動量が $-\boldsymbol{p}_1$ の陽電子を表わし，$\boldsymbol{p}_2$ が電子, すなわち正の時間成分を持つ場合は, 対生成を記述していることになる, 等々である．

行列要素が $(\overline{u}_2 M u_1)$ の事象の生起確率は, その絶対値の 2 乗に比例する．それは次の様に書くことも出来る：

$$|\overline{u}_2 M u_1|^2 = (\overline{u}_2 M u_1)^\dagger (\overline{u}_2 M u_1) = (\overline{u}_1 \overline{M} u_2)(\overline{u}_2 M u_1)$$

ただし $\overline{M}$ は M 中の演算子の順番を逆にし明示的に出現している i は $-i$ に変更したものである ($\overline{M}$ は βM の随伴行列 (エルミート共役), すなわち行列の複素共役をとって転置したものに β を掛け合わせたもの[*109])．多くの問題で, 終状態のスピンを気に掛けることはしない．そこ

[*12] m と一緒に $-i\delta$ も保たれるとするならば, 関数 I_+ は正と負の無限大時刻でゼロに近づく．これは一般的な解析に於いては, 無限に離れた表面からの複雑さを避けるという点で有益であろう．

[*109] [訳註] 現代の教科書, 例えば I. エイチスン&A. ヘイ：「ゲージ理論入門」の付録では, 次の様に書かれている：「スピノール行列要素のエルミート共役」：Γ が γ 行列の任意の積の和であるとき, すなわち $(4,4)$ 行列である

で, 2つのスピン方向に相当する2つの u_2 の確率を合計することが出来る．それは完全な集合ではない．なぜなら $\boldsymbol{p}_2$ は別の固有値 $-m$ を持つからである．全ての状態について足し合わせることを許すには, 射影演算子 $(2m)^{-1}(\boldsymbol{p}_2+m)$ を挿入すれば良い．従って, 始状態 $\boldsymbol{p}_1, u_1$ から任意のスピンを持った状態 $\boldsymbol{p}_2$ に遷移する確率について次を得る：

$$\frac{1}{2m}\overline{u}_1\,\overline{M}\,(\boldsymbol{p}_2+m)\,M\,u_1$$

もし始状態が偏極していないならば, そのスピンについても足し合わせることが出来る．そこで, 任意のスピンを持った運動量 $\boldsymbol{p}_1$ の電子が $\boldsymbol{p}_2$ に遷移する確率 (の 2 倍) は次となる：

$$\frac{1}{(2m)^2}Sp\big[(\boldsymbol{p}_1+m)\overline{M}(\boldsymbol{p}_2+m)M\big] \tag{36}$$

この表現式は, もし負のエネルギーを持った $\boldsymbol{p}$ を挿入すれば, 陽電子に対しても全て正しいものである．そして状況の解釈は, 上記で議論した時間関係に従って行えば良い．(我々が用いた関数の規格化は, 通常の $(\overline{u}\beta u)=(u^*u)=1$ ではなく $(\overline{u}u)=1$ である．よって, 我々のスケールでは $(\overline{u}\beta u)=\text{energy}/m$ となる．従って, 確率は適切な因子によって修正されなければならないので注意する).

著者は, このテーマについて実りある会話を交わした多くの人々, 特に H.A.Bethe と F.J.Dyson に感謝するものである．

付録 A　第 2 量子化からの演繹

この節では, この理論と陽電子の空孔理論との等価性を示すことにする[*2]．与えられたポテンシャルにおける電子場の第二量子化理論によれば, 任意の時間におけるこの電子場の状態は, 次式を満たす波動関数 χ で表される[*13]：

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t}=H\chi,\quad \text{where}\quad H=\int\Psi^*(\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{A})+A_4+m\beta\big)\Psi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}$$

とき, 次が言える：

$$(\overline{u}(p',s')\Gamma u(p,s))^\dagger=\overline{u}(p,s)\overline{\Gamma}u(p',s'),\quad \text{where } \overline{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$$

ただし $\gamma^0=\beta$ である．Γ がここでの行列 M に相当している．

[*2] 前述の注 2.

[*13] 例えば, 次を参照のこと：G.Wentzel, *Einfuhrung in die Quantentheorie der Wellenfelder* (Franz Deuticke, Lipzig, 1943), Chapter V.

ただし $\Psi(\boldsymbol{x})$ は位置 $\boldsymbol{x}$ で電子を消滅させる演算子であり, 他方 $\Psi^*(\boldsymbol{x})$ はそれに対応する生成演算子である．問題としている電子が $t=0$ に於いて互いに直交する通常のスピノル関数 $f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots$ で表される状態にあり, そして陽電子も存在する場合を熟考してみる．それらは負エネルギーの海に於ける空孔であり, 通常では波動関数 $p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), \cdots$ を持つ電子がこの空孔を満たしていると表現される．そこで時間 T の間に, 電子が状態 $g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \cdots$ にあり陽電子が状態 $q_1(\boldsymbol{x}), q_2(\boldsymbol{x}), \cdots$ に存在する確率振幅はどうなるであろうか？, と問うて見よう．この状況を表現する始状態と終状態の状態ベクトルが各々 χ_i と χ_f であるならば, 計算したい行列要素は次である：

$$R_{fi} = \chi^* \exp\left(-i\int_0^T H, dt\right)\chi_i = \chi_f^* S \chi_i \tag{37}$$

ポテンシャル A がゼロでないのは時間が 0 と T の間だけであり, 従って真空はこれらの時間で定義され得ると仮定する．もし χ_0 が真空状態 (即ち, 全ての負エネルギー状態は満たされており, 全ての正エネルギー状態は空である) を表現するならば, 時間 T で真空である確率振幅は, もし $t=0$ で値 1 とするならば次である：

$$C_v = \chi_0^* S \chi_0, \quad \text{where} \quad S = \exp\left(-i\int_0^T H\, dt\right) \tag{38}$$

我々の問題は R_{fi} を評価し, それが C_v に簡単な因子を掛け合わせたものであり, その因子は前節で議論した方法の $K_+^{(A)}$ 関数を含んでいることを示すことである．

上記のことを実行するために, まず χ_i を χ_0 で表現する．次の演算子 [生成演算子] は, 波動関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ の電子を生成する：

$$\Phi^* = \int \Psi^*(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} \tag{39}$$

同様にして, 次の演算子 [消滅演算子] は, 波動関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ の電子を消滅させる：

$$\Phi = \int \phi^*(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} \tag{39'}$$

従って, 式 (39) で ϕ を f_i, g_i, p_i, q_i で置き換えた Φ と同様に定義される演算子を F_i, G_i, P_i, Q_i とすると, 始状態 χ_i および終状態 χ_f は次となる：

$$\chi_i = F_1^* F_2^* \cdots P_1 P_2 \cdots \chi_0, \quad \chi_f = G_1^* G_2^* \cdots Q_1 Q_2 \cdots \chi_0$$

すると始状態は, 真空から電子が $f_1, f_2, \cdots$ より生成され, それらが $p_1, p_2, \cdots$ で消滅するとした結果であるので, 行列要素として次式を見出すに違いない：

$$R_{fi} = \chi_0^* \cdots Q_2^* Q_1^* \cdots G_2 G_1 \, S \, F_1^* F_2^* \cdots P_1 P_2 \cdots \chi_0 \tag{40}$$

これを簡単化するには, 演算子 Φ^* と S 間の交換関係を利用しなければならない．その目的のために (To this end),

$$\exp\left(-i\int_0^t H\,dt'\right)\Phi^*\exp\left(+i\int_0^t H\,dt'\right)$$

を考え, この量を $\Psi^*(\boldsymbol{x})$ で展開するならば, 次が得られる：

$$\int \Psi^*(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{x},t)\,d^3\boldsymbol{x}$$

これは $\phi(\boldsymbol{x},t)$ の定義である．そして, この方程式に $\exp(+i\int_0^t H\,dt')\cdots\exp(-i\int_0^t H\,dt')$ を掛け合わせる．すると次式を見出す：

$$\int \Psi^*(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = \int \Psi^*(\boldsymbol{x},t)\,\phi(\boldsymbol{x},t)\,d^3\boldsymbol{x} \tag{41}$$

ただし $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ の定義は次である：

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) \equiv \exp\left(+i\int_0^t H\,dt'\right)\Psi(\boldsymbol{x})\exp\left(-i\int_0^t H\,dt'\right)$$

よく知られているように $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ は Dirac 方程式を満足しているので ($\Psi(\boldsymbol{x},t)$ を t について微分し H と ψ の交換関係を用いると),

$$i\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \big(\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla - \boldsymbol{A}) + A_4 + m\beta\big)\Psi(\boldsymbol{x},t) \tag{42}$$

その結果、$\phi(\boldsymbol{x},t)$ もまた Dirac 方程式を満足しているべきである (式 (41) を t について微分し, 式 (42) を利用してから部分積分を行う).

即ち, もし $\phi(\boldsymbol{x},T)$ が時間 T での Dirac 方程式解であるならば, それは $t=0$ で $\phi(\boldsymbol{x})$ であり, そして

$$\Phi^* = \int \Psi^*(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}, \quad \Phi'^* = \int \Psi^*(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{x},T)\,d^3\boldsymbol{x}$$

を定義するならば $\Phi'^* = S\Phi^* S^{-1}$, すなわち次式が成り立つ：

$$S\Phi^* = \Phi'^* S \tag{43}$$

この証明の基礎となる原理を, 簡単な例で説明しよう．始状態と終状態で電子が 1 個しかないと仮定して, 次の量 r を求めてみよう：

$$r = (\chi_0^* GSF^* \chi_0) \tag{44}$$

式 (43) を使って F^* を演算子 S に通してみるのもいいかもしれない：$SF^* = F'^* S$．ただし $F'^* = \int \Psi^*(\boldsymbol{x}) f'(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}$ 中の f' は, 時刻 0 での $f(\boldsymbol{x})$ から生じる時刻 T での波動関数である．すると,

$$r = (\chi_0^* GSF^* \chi_0) = \int g^*(\boldsymbol{x}) f'(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} \cdot C_v - \chi_0^* F'^* GS\chi_0 \tag{45}$$

ただし 2 番目の表現は C_v の定義式 (38) を用い, そして次の一般的な交換関係を利用している：

$$GF^* + F^* G = \int g^*(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}$$

これは $\Psi(\boldsymbol{x})$ の特性からの帰結である (他の表現は $FG = -GF$ や $F^* G^* = -G^* F^*$ である)．さて, 式 (45) の最後の項にある $\chi_0^* F'^*$ は $F'\chi_0$ の複素共役である．従って, もし f' が正のエネルギー成分だけを含んでいるならば $F'\chi_0$ はゼロとなるので，r は C_v にある因子を掛けた簡単な形となる．しかし, ここで計算された F' にはポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で生成された負のエネルギー成分が含まれており, この方法は少し修正しなければならない．

F^* を演算子に通す前に, 別の演算子 F''^* をそれに付加してみる．それは負エネルギー成分だけを含む関数 $f''(x)$ から生じる演算子であり, 従ってその結果として生じる関数 f' は正のエネルギー成分だけを含むことになる．即ち, 欲しいのは次式である：

$$S(F^*_{\mathrm{pos}} + F''^*_{\mathrm{neg}}) = F'^*_{\mathrm{pos}} S \tag{46}$$

ただし"pos"と"neg"は演算子に含まれるエネルギー成分の符号を表している．その次に, これを次の形で用いてみる：

$$SF^*_{\mathrm{pos}} = F'^*_{\mathrm{pos}} S - SF''^*_{\mathrm{neg}} \tag{47}$$

我々の一電子問題では, この置き換えにより r は 2 項での置き換えとなる：

$$r = (\chi_0^* GSF'^*_{\mathrm{pos}} S\chi_0) - (\chi_0^* GSF''^*_{\mathrm{neg}} S\chi_0)$$

この最初の項は,(式 (45) と同様な仕方により) 次に還元される：

$$r = \int g^*(\boldsymbol{x}) f'_{\mathrm{pos}}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x} \cdot C_r$$

上記の如く考えると, 今度は $F'^*_{\rm pos}\chi_0$ がゼロとなるが, 他方, 第 2 項はゼロとなる．なぜなら, 真空状態では全ての負エネルギーが満杯なので, 生成演算子 $F''^*_{\rm neg}$ が真空状態に作用するとゼロを与えるからである．これが, この証明 (demonstration) の中心的な考えである．

式 (46) で提示されているのは次の問題である：「関数 $f_{\rm pos}(\boldsymbol{x})$ が時刻 0 で与えられたとき, 時刻 T での Dirac 方程式解が正エネルギー成分 $f'_{\rm pos}(\boldsymbol{x})$ だけを持つためには, 負のエネルギー成分 $f''_{\rm neg}$ を何れだけ付加するべきか？」を見出すことである．これはカーネル $K_+^{(A)}$ が設定された境界値問題である．最初の正のエネルギー成分は $f_{\rm pos}$ であり, 最後の負のエネルギー成分はゼロになることが分かっている．最終の正のエネルギー成分は, 従って (式 (19) を用いると),

$$f'_{\rm pos}(\boldsymbol{x}_2) = \int K_+^{(A)}(2,1)\beta\, f_{\rm pos}(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \tag{48}$$

ただし $t_2 = T,\ t_1 = 0$ である．同様にして, 最初の負のエネルギー成分は,

$$f''_{\rm neg}(\boldsymbol{x}_2) = \int K_+^{(A)}(2,1)\beta\, f_{\rm pos}(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 - f_{\rm pos}(\mathrm{x}_2) \tag{49}$$

ただし t_2 は上からゼロに漸近し, そして $t_1 = 0$ である．$f_{\rm pos}(\mathrm{x}_2)$ が引き算されているのは $f''_{\rm neg}(\boldsymbol{x}_2)$ がいつも与えるのは, ポテンシャルから帰ってくる波だけで, 時刻 t_2 に $K_+(2,1)$ から直接到着する波 (それは $t_2 \to 0$ のときに $K_+^{(A)}(2,1)$ の一部であったものである) ではないためである．$f''_{\rm neg}(\boldsymbol{x}_2)$ は次のように書くことも出来る：

$$f''_{\rm neg}(\boldsymbol{x}_2) = \int \left[K_+^{(A)}(2,1) - K_+(2,1)\right]\beta\, f_{\rm pos}(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 \tag{50}$$

従って, 一電子問題の $r = \displaystyle\int g^*(\boldsymbol{x}) f'_{\rm pos}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}\cdot C_r$ は, 式 (48) によって与えられる：

$$r = C_v \int g^*(\boldsymbol{x}_2)\, K_+^{(A)}(2,1)\beta\, f_{\rm pos}(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_2$$

これは, 前節の推論結果 (reasoning), すなわち式 (20) で K_+ を $K_+^{(A)}$ で置き換えること, と一致している．

証明は, 容易に式 (40) のより一般的な表式 R に拡張できる．それは類推に依って分析することが出来る．まず最初に F_1^* を式 (47) のような関係で置き換えることで 2 つの項が得られる：

$$\begin{aligned} R = {} & (\chi_0^* \cdots Q_2^* Q_1^* \cdots G_2 G_1\, F'^*_{1\rm pos} S F_2^* \cdots P_1 P_2 \cdots \chi_0) \\ & - (\chi_0^* \cdots Q_2^* Q_1^* \cdots G_2 G_1 S\, F''^*_{1\rm neg} F_2^* \cdots P_1 P_2 \cdots \chi_0) \end{aligned}$$

そして最初の項で $F'^*_{1\mathrm{pos}}$ と G_1 の順序を交換する．すると $\int g_1^*(\boldsymbol{x}) f'_{1\mathrm{pos}}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}$ に, 最初と最後で電子が 1 つ少ない表式, を掛け合わせた付加項が作られる．その次に, これを G_2 と交換する．すると $-\int g_2^*(\boldsymbol{x}) f'_{1\mathrm{pos}}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}$ と類似な表式を掛け合わせた付加項が生成される, 等々である．最終的に反交換する Q_1^* に到達したら，χ_0^* と並置してゼロを与えるまで単純に移動することが出来る．第 2 項も同様に処理し，F_2^* などと反交換することにより $F''^*_{1\mathrm{neg}}$ を P_1 に達するまで移動させる．次に, これを P_1 と交換して, 式 (49) で $t_2 = t_1 = 0$ とした次の因子 (式 (49) の余分な $f_1(\boldsymbol{x}_2)$ は, それが $p_1(\boldsymbol{x}_2)$ と反交換するのでゼロを与える),

$$\mp \int p_1^*(\boldsymbol{x}) f''_{1\mathrm{neg}}(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}, \quad \text{or}, \quad \mp \int p_1^*(\boldsymbol{x}) K_+^{(A)}(2,1)\beta f_1(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1\, d^3\boldsymbol{x}_2$$

を持つ付加項を生成する．それは, 期待した仕方での電子 f_1, 陽電子 p_1 ペア消滅を記述するものである．$F''^*_{1\mathrm{neg}}$ は, この様にして次々に P 中を χ_0 に作用するまで移動し, そこでゼロを与えることになる．このように R は, 期待される因子を持って (そして排他律で要求されるように符号を交互に変えて) 演算子を 2 つ減らしたより簡単な項になる．それは, 同様な仕方で F_2^* を使うこと等々により, 更に演算子を減らすことが出来る．全ての F^* が用いられた後, 同様な仕方で今度は Q^* を減らすことが出来る．それらは, 式 (46) から式 (49) に似た関係を用いた同様な仕方で S を逆方向に通過することで, 時刻 0 で純粋な負エネルギー演算子を生成することになる．結局のところ, これが終わった後には, 単純に期待値に C_v を掛け合わせたものが残る (正味の電荷は, 最初と最後で同じであると仮定する).

この様にして, 与えられたポテンシャルに於ける電子の運動という一般的な問題の解は書き下されたのである．係数 C_v は正規化によって得られる．しかしながら, 光子場では C_v をポテンシャルによって明示的に表現することが望まれる．それは式 (30) と式 (29) で与えられ, これも第二量子化によって正しいことが簡単に証明される．

付録 B　真空問題の分析

ここでは, より希望に近いポテンシャル分布を含む一連の問題を帰納的に (by induction) 検討することで, 第二量子化から C_v を計算することにする．我々が望むような問題で, ある t_0 と T の間の時間 t には同じポテンシャルを持ち, 0 から t_0 までの時間にはポテンシャルがゼロである場合の C_v が分かったとする．これを $C_v(t_0)$ と呼び, それに相当するハミルトニアンを H_{t_0} そして全ての 1 ループの寄与の和を $L(t_0)$ と呼ぶことにする．すると $t_0 = T$ の場合, 全ての時間でポテンシャルはゼロであり, 電子-陽電子対は全く生成されないので $L(T) = 0$ そして $C_v(T) = 1$ である．$t_0 = 0$ の場合, 問題は完全である．従って $C_v(0)$ は式 (38) の C_v とし

て定義されたものになる．一般的には次となる：

$$C_v(t_0) = \chi_0^* \exp\left(-i\int_0^T H_{t_0}\,dt\right)\chi_0 = \chi_0^* \exp\left(-i\int_{t_0}^T H_{t_0}\,dt\right)\chi_0$$

というのは，H_{t_0} は $t < t_0$ で一定の真空ハミルトニアン H_T と同じであり, そして χ_0 は H_T の固有関数であり, 固有値 (真空のエネルギー) はゼロと見做すことが出来るからである．

$C_v(t_0 - \Delta t_0)$ の値が生じるのはハミルトニアン $H_{t_0-\Delta t_0}$ からである．それは, 短い時間 Δt_0 の区間で余分なポテンシャルを持つことだけが H_{t_0} と異なるハミルトニアンである．従って, $C_v(t_0 - \Delta t_0)$ の Δt_0 について 1 次までの値は次となる：

$$\begin{aligned} C_v(t_0 - \Delta t_0) &= \chi_0^* \exp\left(-i\int_{t_0-\Delta t_0}^T H_{t_0-\Delta t_0}\,dt\right)\chi_0 \\ &= \chi_0^* \exp\left(-i\int_{t_0}^T Ht_0\,dt\right)\left[1 - i\Delta t_0 \int \Psi^*(\boldsymbol{x})\big[-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t_0) + A_4(\boldsymbol{x},t_0)\big]\Psi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}\right]\chi_0 \end{aligned}$$

従って C_v の導関数は, 次の様な表式となる：

$$-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = -i\chi_0^*\left(\exp\left(-i\int_{t_0}^T Ht_0\,dt\right)\int \Psi^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t_0)\Psi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}\right)\chi_0 \tag{51}$$

R を減らすのに使ったのと同じような方法によって, これは単純な因子に $C_v(t_0)$ を掛け合わせたものに簡単化できるであろう．演算子 Ψ は, 各々が正エネルギー状態及び負エネルギー状態に作用する $\Psi_{\rm pos}$ と $\Psi_{\rm neg}$ という２つの部分に分けることを想像することが出来る．$\Psi_{\rm pos}$ が χ_0 に作用するとゼロになるから, カレント密度中には $\Psi^*_{\rm pos}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi_{\rm neg}$ と $\Psi^*_{\rm neg}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi_{\rm neg}$ という２つの項が残る．後者の $\Psi^*_{\rm neg}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi_{\rm neg}$ は, 全ての負エネルギー状態について取った $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}$ の期待値である ($-\Psi_{\rm neg}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi^*_{\rm neg}$ は χ_0 に作用するとゼロを与える)．これは, 電子の海に於ける電子カレントの真空期待値の効果である．それは, 通常の方法では元のハミルトニアンから差し引くべきものであった．

残りの項 $\Psi^*_{\rm pos}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi_{\rm neg}$, またはそれに等価な $\Psi^*_{\rm pos}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi$ は，$\boldsymbol{f}_{\rm pos}(\boldsymbol{x})$ を演算子 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\Psi$ の正エネルギー成分に対して書いたとき $\Psi^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{\rm pos}(\boldsymbol{x})$ と考えることが出来る．さて, この演算子 $\Psi^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{\rm pos}(\boldsymbol{x})$ は, または, より正確に言えばその $\Psi^*(\boldsymbol{x})$ だけは，f が関数であるときの式 (47) と全く類似したやり方で $\exp\left(-i\int_{t_0}^T H\,dt\right)$ を通過させることが出来る．(「ディラック方程式を満たす演算子 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ は, それと等価な線形積分方程式も満たす」と考えることで, 別の導

出が可能である)．すなわち, 式 (51) は式 (48), 式 (50) により, 次のよう書くことが出来る：

$$
\begin{aligned}
-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} &= -i\left(\chi_0^* \iint \Psi^*(\boldsymbol{x}_2) K_+^{(A)}(2,1) \exp\left(-i\int_{t_0}^{T} H\,dt\right) \boldsymbol{A}(1)\Psi(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 d^3\boldsymbol{x}_2\, \chi_0\right) \\
&+ i\left(\chi_0^* \exp\left(-i\int_{t_0}^{T} H\,dt\right) \iint \Psi^*(\boldsymbol{x}_2)[K_+^{(A)}(2,1) - K_+(2,1)]\boldsymbol{A}(1)\psi(\boldsymbol{x}_1)\, d^3\boldsymbol{x}_1 d^3\boldsymbol{x}_2\, \chi_0\right)
\end{aligned}
$$

ただし最初の項では $t_2 = T$, そして第２項では $t_2 \to t_0 = t_1$ である．$K_+^{(A)}$ の (A) は, ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の t_0 以降の部分を指している．最初の項はゼロとなる．なぜなら, それは Ψ^* の正エネルギー成分だけを含んでおり, それは χ_0^* に作用するとゼロを与えるからである．第２項では $\Psi^*(\boldsymbol{x}_2)$ の負エネルギー成分だけが出現している．その後, もし $\Psi^*(\boldsymbol{x}_2)$ が $\Psi(\boldsymbol{x})$ と交換するならば, それは χ_0 に作用してゼロを与える．そして Ψ^* と Ψ の通常の交換関係から, 次の項だけが残るであろう：

$$
-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = +i\int Sp\left[K_+^{(A)}(1,1) - K_+(1,1)\boldsymbol{A}(1)\right] d^3\boldsymbol{x}_1 \cdot C_v(t_0) \tag{52}
$$

式 (52) 中の $C_v(t_0)$ の因子に $-\Delta t_0$ を掛け合わせたものは, 式 (29) に拠れば (脚注 (10) を見よ), ちょうど $L(t_0 - \Delta t_0) - L(t_0)$ である．なぜなら, この差は短区間 Δt_0 での余分なポテンシャル $\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ から生じるからである．従って,

$$
-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = +\frac{dL(t_0)}{dt_0} C_v(t_0)
$$

それ故，$t_0 = 0$ から $t_0 = T$ まで積分すると式 (30) が立証される．

第二量子化における電磁場の理論から出発して, 次の論文で出てくる量子電気力学の方程式の演繹は, 非常によく似た原理で行うことが出来るだろう．Klein-Gordon 方程式の Pauli-Weisskopf 理論はどうやら, ここで Dirac 電子について用いたのと基本的に同じ方法で解析できるらしい．