S-Matrix and Asymptotic theory

以下は C.Itzykson, J-B.Zuber 著「Quantum Field Theory」の§ 5-1 の前半を翻訳したものである.

5.1 S-行列と漸近理論 (S-Matrix and Asymptotic theory)

遷移振幅を摂動論的に評価する前に, 運動学を完成させなければならない. この章では, これらの計算を興味のある物理過程に関連付けることを可能にする一般的なフレームワークを紹介する. 実際には様々なターゲットからの粒子散乱を調べるのが主な手段である. 巨視的なスケールでは相互作用時間は極めて小さい. 従って素粒子の散乱イベント中の時間発展を詳細に追跡することは問題外である. 我々が出来るのは次のような描像だけである. 衝突のずっと前では, よく分離された波束は独立的にそして自由に時間発展する. 第 4 章の特殊な例ですでに議論したように, これらの入射状態の集合は Fock 空間すなわち関連する自由場の in-空間を形成する. ここで重要なことは, それらの in-状態は質量や電荷といった孤立した粒子の個々の特徴を正確に表していなければならないということである. 言い換えれば, それらの測定可能なパラメータには自己相互作用の効果が取り入れられていなければならない. その後, エネルギー, 運動量, 角運動量, パリティ, 電荷共役, そして内部対称性などの基本的な保存則に従いながら, 散乱, 吸収, そして新しい粒子生成を伴う衝突過程が続く. 衝突の後, 自由波束は引き離され出射状態を表わすものとなる. それらは再び自由粒子運動学および相当する自由場によって記述される. 量子力学の定石に従えば, 振幅 $\langle b, \mathrm{out}|a, \mathrm{in}\rangle$ からは, 入射状態 $|a\rangle$ が時間発展して $|b\rangle$ の状態で測定される確率を得ることが出来る.

連続する過程の場合, out-状態は in-状態を表わすことが出来る. 例えば, 二次ビームを準備するときがそうである. 従って in-Fock 空間と out-Fock 空間の間に同型写像 (isomorphism) が存在する必要がある. 我々の目標は, 上記の「遷移振幅」を実際の測定値と関連付けることである. つまり, フェルミの黄金律の相対論的な慣例を確立し, 断面積の式を与えたいのである.

5.1.1　断面積 (Cross Sections)

簡単な場合として, まずスピンの無い別個の２粒子の散乱を想定してみよう．入射状態は, 運動量空間の入射波束 (incident wave packets) によって書くことが出来る：

$$|i, \mathrm{in}\rangle = \int \frac{d^3p_1}{2p_1^0(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2p_2^0(2\pi)^3} f_1(p_1)f_2(p_2)|p_1, p_2, \mathrm{in}\rangle \tag{5-1}$$

これらの波束には, 対応する質量を持ったクライン・ゴルドン方程式の正エネルギー解 $\tilde{f}(x)$ が付随している：

$$\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} e^{-ipx} f(p) \tag{5-2}$$

そしてフラックス (flux) は次で与えられる*：

$$i\int d^3x\, \tilde{f}^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}\big|f(p)\big|^2 \tag{5-3}$$

終状態 $|f, \mathrm{out}\rangle$ への遷移確率は次となる：

$$W_{f\leftarrow i} = \big|\langle f, \mathrm{out}\,|\, i, \mathrm{in}\rangle\big|^2 \tag{5-4}$$

外部に源がない場合, 並進不変性が意味するのはエネルギーと運動量が保存されていない場合にはこの遷移行列要素がゼロになることである†．さらに第 4 章で述べたように, out-状態と in-状態の同型写像を仮定すると, 一般に S-行列と呼ばれる次のようなユニタリー演算子 S が存在することを意味する：

$$\langle f, \mathrm{out}\,|\, i, \mathrm{in}\rangle = \langle f, \mathrm{in}\,|S|\, i, \mathrm{in}\rangle \tag{5-5}$$

* [訳註] $f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}g(x)$ は次式を意味している (2 項の減算となることに注意する)：

$$f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}g(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x^0}g(x) - f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x^0}$$

† [訳註] 平行移動演算子 $\mathscr{T}(\boldsymbol{l}) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}}{\hbar}\right)$ はユニタリー演算子である：$\mathscr{T}^\dagger\mathscr{T} = 1$．ハミルトニアン H が $\mathscr{T}$ に関して不変であるとすると, 平行移動演算子の母関数 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{p}/\hbar$ が H と交換可能となり, 従って運動量 $\boldsymbol{p}$ が H と交換可能となる：

$$\mathscr{T}^\dagger H\mathscr{T} = H \quad\to\quad [\boldsymbol{K}, H] = 0, \quad\therefore\quad [\boldsymbol{p}, H] = 0$$

ハイゼンベルグの運動方程式を用いると, これより次が得られる：

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = [\boldsymbol{K}, H] = 0 \quad\to\quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = [\boldsymbol{p}, H] = 0$$

これは「運動量 $\boldsymbol{p}$ が運動の定数」となることを示している．従って, 系が平行移動演算子を作用させても不変 (並進不変性) ならば, エネルギーと運動量は一定に保たれる (運動の定数となる)．

確率を保存するためには S はユニタリーでなければならない．厳密に言うならば, 式 (5-5) に従って S は out-状態を in-状態に当てはめているのである．ここでは大雑把に「その行列要素を in-空間に取り込む」と言うことにし, 必要がなければ添字 ‘in’ は書かないことにする．すると S は次のように分解される：

$$S = I + iT \tag{5-6}$$

このとき T は相互作用の情報を含んでいる．理想化して最終状態を平面波の状態とすると, 次式によってエネルギー運動量保存のデルタ関数を抜き出すことが出来る：

$$\langle f|T|p_1, p_2\rangle = (2\pi)^4\, \delta^4(P_f - p_1 - p_2)\langle f|\mathscr{T}|p_1, p_2\rangle \tag{5-7}$$

そして換算演算子 (reduced operator)$\mathscr{T}$ はエネルギー殻に作用する．分解式 (5-6) を行列要素式 (5-5) に代入すると, 恒等式 I は前方散乱にのみ寄与するので, 相互作用に影響されない入射波束の一部のみを表わすことになる．ほとんどの実験では偏向された部分にしか興味がない．このことは, 遷移確率 $W_{f\leftarrow i} = \left|\langle f, \mathrm{out}\,|\, i, \mathrm{in}\rangle\right|^2$ への唯一の寄与として $\mathscr{T}$ だけを残すことを正当化するものである (測度 $d\tilde{p}$ は $d\tilde{p} = d^3p/(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}$ である)：

$$\begin{aligned}
W_{f\leftarrow i} &= \left|\langle f|S|i, \mathrm{in}\rangle\right|^2 = \langle f|T|i, \mathrm{in}\rangle^* \langle f|T|i, \mathrm{in}\rangle \\
&= \int \frac{d^3p_1}{2p_1^0(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2p_2^0(2\pi)^3} f_1^*(p_1) f_2^*(p_2)\langle f|T|p_1, p_2, \mathrm{in}\rangle^* \\
&\quad \times \int \frac{d^3p_1'}{2p_1'^0(2\pi)^3}\frac{d^3p_2'}{2p_2'^0(2\pi)^3} f_1(p_1') f_2(p_2')\langle f|T|p_1', p_2', \mathrm{in}\rangle \\
&= \int d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2\, f_1^*(p_1) f_2^*(p_2)\,(2\pi)^4\delta^4(P_f - p_1 - p_2)\langle f|\mathscr{T}|p_1, p_2\rangle^* \\
&\quad \times \int d\tilde{p}_1' d\tilde{p}_2'\, f_1(p_1') f_2(p_2')\,(2\pi)^4\delta^4(P_f - p_1' - p_2')\langle f|\mathscr{T}|p_1', p_2'\rangle \\
&= \int d\tilde{p}_1\, d\tilde{p}_2\, d\tilde{p}_1'\, d\tilde{p}_2'\, f_1^*(p_1) f_2^*(p_2) f_1(p_1') f_2(p_2')\,(2\pi)^4\delta^4(P_f - p_1 - p_2) \\
&\qquad \times (2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\langle f|\mathscr{T}|p_1, p_2\rangle^* \langle f|\mathscr{T}|p_1', p_2'\rangle
\end{aligned} \tag{5-8}$$

最終状態が運動量の固有状態でない場合には, 上記の式を明白な方法で少し一般化しなければならない．ほとんどの場合, 準備する初期粒子はほぼ「性質のよい」(well defined) 運動量を持っている．その運動量は $\mathscr{T}$ の行列要素の分散スケールでは無視できる幅を持っている．つまり $f_i(p_i)$ は平均値 $\bar{p}_i$ を中心に幅 Δp_i でピークを持つ．従って,

$$\langle f|\mathscr{T}|p_1', p_2'\rangle \simeq \langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1, \bar{p}_2\rangle \simeq \langle f|\mathscr{T}|p_1, p_2\rangle$$

この近似と次のデルタ関数の積分表現

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') = \int d^4x\, e^{-ix\cdot(p_1'+p_2'-p_1-p_2)}$$

を用いると, 遷移確率は次式となることが分かる：

$$W_{f\leftarrow i} = \int d^4x\,\big|\tilde{f}_1(x)\big|^2\big|\tilde{f}_2(x)\big|^2(2\pi)^4(P_f-\bar{p}_1-\bar{p}_2)\big|\langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1,\bar{p}_2\rangle\big|^2 \tag{5-9}$$

この式は「単位時間当たり単位体積当たりの遷移確率」が次であると解釈できる：

$$\frac{W_{f\leftarrow i}}{dV\,dt} = \big|\tilde{f}_1(x)\big|^2\big|\tilde{f}_2(x)\big|^2(2\pi)^4(P_f-\bar{p}_1-\bar{p}_2)\big|\langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1,\bar{p}_2\rangle\big|^2 \tag{5-10}$$

今の場合 $\tilde{f}_i(x) = e^{-i\bar{p}_i}F_i(x)$ である．ただし $F_i(x)$ は次式となるよう x の関数としてゆっくり変化する：

$$i\tilde{f}^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\tilde{f}(x) \simeq 2\bar{p}_\mu\big|\tilde{f}(x)\big|^2 \tag{5-11}$$

具体的に (実際的に), タイプ 1 粒子は, 静止しているタイプ 2 粒子の実験室系に対して入射すると仮定しよう．単位体積あたりの標的中の粒子数 (即ち粒子密度) は $dn_2/dV = 2\bar{p}_2^0\big|\tilde{f}_2(x)\big|^2$, ただし $\bar{p}_2^0 = m_2$ である．入射フラックスは, 速度 $|\bar{\boldsymbol{p}}_1|/\bar{p}_1^0$ × 密度 $2\bar{p}_1^0|\tilde{f}_1(x)|^2$ で $2|\bar{\boldsymbol{p}}_1||\tilde{f}_1(x)|^2$ となる†.

---

† [訳註] 相対論的運動学の復習をしておく．$\beta = v/c$ として $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とすると, 質量 m, 速度 $\boldsymbol{v}$ の粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギー E は次となる：

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m\boldsymbol{v}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2$$

2 つの事象の無限小の世界間隔 ds は次となる：

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

粒子の 4 元速度 u^μ と 4 元運動量 p^μ は次である：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \gamma\frac{dx^\mu}{cdt} = \left(\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right), \quad p^\mu = mcu^\mu = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \equiv \left(p^0, \boldsymbol{p}\right)$$

従って, 粒子の 3 次元速度 $\boldsymbol{v}$ は $c=1$ とするとき次のように表せる：

$$\frac{\boldsymbol{p}}{p^0} = \frac{\gamma m\boldsymbol{v}}{\gamma mc} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{p^0}$$

また, フラックス即ち 4 元カレント密度 $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ の第 0 成分は密度 ρ であり, 式 (5-3) に式 (5-11) を用いるならば,

$$i\int d^3x\,\tilde{f}^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\tilde{f}(x) \simeq \int d^3x\,2\,\bar{p}_0\big|\tilde{f}(x)\big|^2 = \int d^3x\,\rho, \quad \rightarrow \quad \rho = 2\,\bar{p}^0\big|\tilde{f}(x)\big|^2$$

これは式 (5-10) に次のような解釈を与える：「$dW_{f\leftarrow i}/dV=${状態 $|i\rangle$ から状態 $|f\rangle$ への単位時間当たり単位体積当たりの遷移確率}={ターゲット密度 $[2m_2\big|\tilde{f}_2(x)\big|^2]\times$ 入射フラックス $[2\big|\bar{\boldsymbol{p}}_1\big|]\big|\tilde{f}_1(x)\big|^2\times$ 断面積 $d\sigma$}である」．ただし, 断面積 (cross section) は次である：

$$d\sigma=(2\pi)^4\delta^4(P_f-\bar{p}_1-\bar{p}_2)\frac{1}{4m_2\big|\bar{\boldsymbol{p}}_1\big|}\big\langle f\big|\mathscr{T}\big|\bar{p}_1,\bar{p}_2\big\rangle\big|^2 \tag{5-12}$$

「断面積 $d\sigma$ は, ターゲット内の散乱体 1 個当たり, 単位入射フラックス当たりの遷移確率である」．よく定義された運動量を持つ理想化した最終状態は, エネルギーと運動量の分解能を Δ とした積分を行うことで補正される．例えば, 最終状態として n 個の異なるスピンレス粒子の状態を考えた場合 (図 1 を参照), 断面積は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}d\sigma_{n\leftarrow 2}=&\frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}\int_\Delta d\tilde{p}_3\cdots d\tilde{p}_{n+2}\big|\langle p_3,\cdots,p_{n+2}|\mathscr{T}|p_1,p_2\rangle\big|^2\\&\times(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-\cdots p_{n+2})\end{aligned} \tag{5-13}$$

ただし, 上式では因子 $m_2\big|\boldsymbol{p}_1\big|$ を相対論的不変量 (ローレンツ不変) で表現している．それは, 実験室系では次式が言えることに注目したことによる‡：

$$m_2\big|\boldsymbol{p}_1\big|=m_2\sqrt{(p_1^0)^2-m_1^2}=\sqrt{(p_2\cdot p_1)^2-m_1^2m_2^2}$$

このように, 断面積はローレンツ不変の概念として定義されている．なお,「$d\tilde{p}$ はボゾンのローレンツ不変測度 $d\tilde{p}=d^3p/2p^0(2\pi)^3$ を示している」ことを思い出そう．これらの公式は勿論, 一粒子状態が次式に従って正規化されていることを前提としている：

$$\langle p'|p\rangle=2p^0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})$$

すなわち, 一粒子状態は正準生成演算子によって真空状態から生成されたものである．この正規化によって, 波動関数 f で表わされるフラックス密度の解釈が可能になる．

‡ [訳註] 粒子散乱の相対論的運動学は例えば B. ポッフ等「素粒子・原子核物理入門」の § 5.1 を参照のこと．4 元運動量について $p^2=(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2=m^2$ が言えるので $\boldsymbol{p}_1^2=(p_1^0)^2-m_1^2$ である．粒子 2 は実験室系で静止していると $p_2^0=E/c=m_2c^2/c=m_2c$ なので $p_2=(m_2,\mathbf{0})$ と出来る．従って次が言える：

$$p_2\cdot p_1=(m_2,\mathbf{0})\cdot(p_1^0,\boldsymbol{p}_1)=m_2p_1^0$$

以上のことから,

$$m_2\big|\boldsymbol{p}_1\big|=m_2\sqrt{(p_1^0)^2-m_1^2}=\sqrt{m_2^2(p_1^0)^2-m_2^2m_1^2}=\sqrt{(p_2\cdot p_1)^2-m_1^2m_2^2}$$

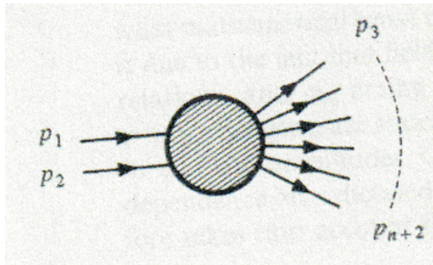

図 1　一般的な散乱過程の運動学

質量のあるフェルミンを扱う場合, 因子 $2p^0$ は p^0/m に置き換えられる. 例えば, 衝突する 2 つの粒子がフェルミオンである場合, 式 (5-13) の前の因子 1/4 は $m_1 m_2$ に置き換えられ, 最終粒子にフェルミオンが生起する場合, 位相空間要素 $d\tilde{p}$ は $(m/p^0)[d^3p/(2\pi)^3]$ と理解されるべきである. しかし質量のないフェルミオンが散乱過程に関与する場合は, ボゾンの位相空間因子のままとする.

読者は, 粒子の一部が同一であったりスピンを持っていたりする場合の式 (5-13) の修正について研究することが望まれる. 初期状態が純粋な状態ではなく, 偏光密度行列を用いて記述しなければならない場合はどうなるのであろうか？ここでは不変な遷移振幅と断面積の関係を紹介した. もう一つの物理的に重要な例は, 不安定な複合系の崩壊率の計算である. それは, 第 5 章 2-3 節でポジトロニウムの場合について説明する.

5.1.2　**漸近理論** (Asymptotic Theory)

衝突の研究の中心的な問題は, オンシェル状態間の S-行列要素の計算である. 前章で外部と結びついた量子化された場の振る舞いを調べたように, ラグランジュ形式の場の理論にはこれらの量を計算するためのアルゴリズムが用意されている. 局所的な力学では, この S 演算子を詳細に調べ, より初歩的な量である「基本グリーン関数」(fundamental Green function) で表現することが出来る. 定式化を出来るだけ単純化するため, 議論は自己相互作用するスカラー場の枠内で展開することにする. 電気力学のようなもっと精巧な場合への一般化は, より多くの運動学に関わるだけであって, 論理に影響を与えることはない. これは後述 (sequel) に譲ることにする.

この状況を要約してみよう. 状態のフォック空間は $\varphi_{\rm in}(x)$ で示される自由場によって一意の真空から生成される. これが全力学過程の舞台となる. 最良の世界では, 物理的なオブザーバブルはこの一意の自由場で表現できるであろう. 特に, 相互作用する場 $\varphi(x)$ はそうである

べきである．直感的には, この 2 つの場は次のような関係にあると考える．遠い過去に於いて $\varphi_{\rm in}(x)$ は $\varphi(x)$ の適切な極限値である．これは勿論, 検討中のある明確な過程を指しており, 衝突に基本的関与をする粒子たちが互いに十分に離れている場合にのみ適用される．この考えを実現するために, 運動方程式中の結合項は有限時間では 1 に等しく, 時間が $|t| \to \infty$ のとき滑らかに消える「断熱カットオフ関数」によって影響を受けると仮定することが出来る．そして全ての物理量は, この断熱的スイッチが取り除かれたときの極限で理解されなければならない．このような条件下で, 断熱仮説は次のことを主張する：

$$x_0 \to -\infty, \qquad \varphi(x) \to Z^{1/2}\varphi_{\rm in}(x) \tag{5-14a}$$

すぐに 2 つの疑問が湧いて来る．係数 $Z^{1/2}$ の意味は何だろう?．どのような数学的意味でこの極限が成り立つと考えるのだろうか?．まず式 (5-14a) の因子は, 場が同時刻の交換関係により自然に正規化されるという事実のためであり, そして真空に作用する $\varphi_{\rm in}$ が一粒子状態しか生成しないのに対し φ は余分な対を持つ状態も生成するためである (ラグランジアンは φ について偶であると仮定する)．振幅 $\langle 1|\varphi_{\rm in}(x)|0\rangle$ と $\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$ は運動学の指示によって x に対し同じ関数依存性を持っている．従って, 正規化係数 $Z^{1/2}$ は状態 $\varphi(x)|0\rangle$ の内容が行列要素 $\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$ によって尽くされないことを考慮に入れており, もし φ が $\varphi_{\rm in}$ で置き換えられる場合には使い果たされるであろう．従って, 直感的に $Z^{1/2}$ は 0 と 1 の間の数値であると期待される．

さらに, 式 (5-14a) に含まれる極限は弱極限, すなわち各行列要素に対して個別に有効な極限でしかない．もしそうでないと, 2 つの場 φ の交換子は Z に至るまで, 相当する c 数の自由場交換子と等しいと結論づけられてしまう．このような状況では, 正準量子化は $Z = 1$ を必要とし, 我々はすぐに φ が自由場であることを発見することになってしまう!．このことから, 断熱条件は慎重に扱わなければならないことが分かる．定数 Z は, 以下のような Lehmann と Källen による 2 つの相互作用場の交換子のスペクトル表現に関連づけることが出来る．この交換子の真空の期待値を考える．簡単のため, 場はエルミートであると仮定する．並進不変性を用いると,

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = \sum_\alpha \left[\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle e^{-ip_\alpha\cdot(x-y)}\langle\alpha|\varphi(0)|0\rangle - (x \leftrightarrow y)\right] \tag{5-15}$$

ただし和は正エネルギー状態 α の完全集合について取るものとする．この式 (5-15) を, 質量 m の 2 つの自由場の交換子

$$i\Delta(x-y; m) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \varepsilon(q^0)\delta(q^2-m^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} \tag{5-16}$$

と比較するために, 式 (5-15) に次の恒等式を挿入する：

$$1 = \int d^4q\, \delta^4(q - p_\alpha)$$

すると次を得る：

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \rho(q) \big[e^{-iq\cdot(x-y)} - e^{iq\cdot(x-y)}\big] \tag{5-15'}$$

ただし次の密度を導入した：

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_\alpha \delta^4(q - p_\alpha) \big|\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle\big|^2$$

この密度 ρ は明らかに正であり, 時空座標 q が未来の光円錐中に居ないならばゼロとなる；更に $\rho(q)$ はローレンツ不変である．これは, 相当する場 φ の特性により要求されることである．従って, この密度 ρ は次のように書くことが出来る：

$$\rho(q) = \sigma(q^2)\theta(q^0) \qquad \text{with } \sigma(q^2) = 0 \text{ if } q^2 < 0$$

一般に, これはデルタ関数の特異点が発生する可能性のある正の測度である．最終的に, 正の重みを持つ自由な交換子の寄与の重ね合わせ (Källen-Lehmann 表現) を得ることになる：[†]

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = i \int_0^\infty dm'^2\, \sigma(m'^2)\, \Delta(x - y; m') \tag{5-17}$$

[†] [訳註] 式 (5-17) の右辺に式 (5-16) を代入すると, デルタ関数の性質や $\varepsilon(q^0) = \theta(q^0) - \theta(-q^0)$ と書けることを用いることで, それを式 (5-15') に一致させることが出来るからである：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dm'^2\, \sigma(m'^2)\, i\Delta(x - y; m') = \int_0^\infty dm'^2\, \sigma(m'^2) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \varepsilon(q^0)\delta(q^2 - m'^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dm'^2\, \sigma(m'^2)\, \varepsilon(q^0)\delta(q^2 - m'^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \varepsilon(q^0)\sigma(q^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \big\{\theta(q^0) - \theta(-q^0)\big\}\sigma(q^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \theta(q^0)\sigma(q^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \theta(-q^0)\sigma(q^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \theta(q^0)\sigma(q^2)\, e^{-iq\cdot(x-y)} - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \theta(q^0)\sigma(q^2)\, e^{iq\cdot(x-y)} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\, \rho(q) \big[e^{-iq\cdot(x-y)} - e^{-iq\cdot(x-y)}\big]
\end{aligned}$$

同様な推論に従えば, 同じスペクトル関数 ρ を持つ時間順序積の真空期待値にも同様の結果が成り立つであろうことが容易に理解できる.

漸近条件を用いると, 式 (5-17) 中の一粒子状態の寄与は明示的に分離することが出来る：

$$\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle = iZ\Delta(x-y;m) + i\int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2\,\sigma(m'^2)\,\Delta(x-y;m') \tag{5-18}$$

ここで m は粒子の質量を表わし $m_1 > m$ は多粒子での閾値である. 相互作用ラグランジアンが場の微分を伴わないならば $\dot{\varphi}$ は φ と共役となる. 式 (5-18) の両辺の時間微分をとり $\delta(x-y)$ の係数を特定すると, 正準量子化は次を意味することが分かる：

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2\,\sigma(m'^2) \tag{5-19}$$

σ が正値であることは, 次式が言えることを正しく示している：

$$0 \leq Z < 1 \tag{5-20}$$

$\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$ や $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ と異なる φ の行列要素がある場合, 値 1 は除外される. $Z=1$ となるには, 明らかに $\varphi = \varphi_{\text{in}}$ であることが必要である.

Källen-Lehmann 表現から, 漸近的極限は強い意味では理解できないことが容易に理解できる. また $|x^0 - y^0| \to \infty$ の時には一粒子の寄与が支配的であり, 残りの項は強く振動する因子によって減衰することも確認できる. 同じ意味で, 式 (5-19) は密度 $\sigma(m^2)$ に境界を与えている. 多粒子状態は $\sigma(m^2)$ に無限大に広がる支持集合 (support) *を与え, そして Z の正値性を破壊する傾向が強くなっていく.

遠い過去に於ける漸近極限の式 (5-14a) に類似した仕方により, 次のようになることも予想される：

$$x_0 \to +\infty \qquad \varphi(x) \to Z^{1/2}\varphi_{\text{out}}(x) \tag{5-14b}$$

ただし φ_{out} はやはり自由場であり φ_{in} と同じ質量 m と同じ定数 $Z^{1/2}$ を持つ. 真空は唯一であることは $|0,\text{in}\rangle = |0,\text{out}\rangle = |0\rangle$ を意味する (ただし起こり得る相対的な位相は便宜的に 1 とする). さらに, 一粒子状態は安定であると仮定する. このような条件下では $|1,\text{in}\rangle = |1,\text{out}\rangle$ となる. $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ は相当する φ_{in} と φ_{out} の行列要素と同じ x 依存性を持ち, その規格化は

* [訳注] 台, 支持集合とは, その関数がゼロでない集合の閉包を言う.

自由場の特性によって決まっているので, 必然的に次となる：

$$\langle 0|\varphi(x)|1\rangle = Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{\rm in}(x)|1\rangle = Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{\rm out}(x)|1\rangle \tag{5-21}$$

S 行列は in-状態と out-状態の間の同型写像を引き起こす．式 (5-5) から次が言える：[†]

$$|{\rm out}\rangle = S^{-1}|{\rm in}\rangle = S^{\dagger}|{\rm in}\rangle, \quad \text{or} \quad |{\rm in}\rangle = S|{\rm out}\rangle, \tag{4-10}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\rm in}(x) &= S\,\varphi_{\rm out}(x)\,S^{-1}, \\ |i,{\rm in}\rangle &= S|i,{\rm out}\rangle, \qquad (5\text{-}22) \\ \langle f,{\rm in}|S|i,{\rm in}\rangle &= \langle f,{\rm out}|S|i,{\rm out}\rangle \end{aligned}$$

更には,

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1, \qquad \langle 1|S|1'\rangle = \langle 1|1'\rangle \tag{5-23}$$

ただし一粒子状態の添字は省略しており, それらの状態の安定性を翻訳したに過ぎない.

ユニタリーな S 行列は理論の共変性を実現するためにポアンカレ変換[‡]と交換可能でなければならない：

$$U(a,\Lambda)\,S\,U^{-1}(a,\Lambda) = S \tag{5-24}$$

また，Bogoliubov と Shirkov に倣って, ラグランジアン中の結合定数の時空依存性を許容すれば S 行列のより深い局所特性 (locality property) を表現することが出来る．このアプローチの体系的な使い方については, 彼らの教科書を参照されたい.

[†] [訳注] 式 (5-5) は「S の行列要素 S_{fi} の定義式」と見做すことが出来る：

$$S_{fi} \equiv \langle f,{\rm in}|S|i,{\rm in}\rangle = \langle f,{\rm out}|i,{\rm in}\rangle = \langle f,{\rm out}|S|i,{\rm out}\rangle \tag{5-5'}$$

これより次が言える：

$$\langle f,{\rm in}|S|i,{\rm in}\rangle = \langle f,{\rm out}|i,{\rm in}\rangle \;\to\; \langle f,{\rm in}|\,S = \langle f,{\rm out}| \tag{1}$$

この式 (1) を逆に行列 S の定義とすることも出来る (日置)．式 (1) に右から S の複素共役 $S^{\dagger}$ を作用させると, 行列 S のユニタリー性 $SS^{\dagger}=1$ から次が言える：

$$\langle f,{\rm in}|SS^{\dagger} = \langle f,{\rm out}|\,S^{\dagger} \;\to\; \langle f,{\rm in}| = \langle f,{\rm out}|\,S^{\dagger} \;\to\; |f,{\rm in}\rangle = S|f,{\rm out}\rangle, \;\xrightarrow{(f\to i)}\; |i,{\rm in}\rangle = S|i,{\rm out}\rangle$$

または, 日置によれば遷移振幅を $\mathscr{A}(\Psi_i\to\Psi_f)$ とすると,

$$\begin{aligned} &|\Psi(t_f)\rangle = S|\Psi_i\rangle = S|i,{\rm in}\rangle, \\ &\mathscr{A}(\Psi_i\to\Psi_f) = \langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|S|\Psi_i\rangle = \langle f,{\rm in}|S|i,{\rm in}\rangle = \langle f,{\rm out}|i,{\rm in}\rangle \end{aligned}$$

[‡] [訳注] (Wikipedia より) ポアンカレ変換とは, ミンコフスキー空間における等長変換である．等長変換においては内積が保存される．ポアンカレ変換は並進とローレンツ変換からなる.

【参考メモ】***

式 (5-15) から式 (5-17) を理解のために F.Mandl/G.Shaw:Quantum Field Theory の§ 3.3 の一部を訳出しておく.

ラグランジュ形式を用いて得られる運動方程式は明白に共変的である一方, ラグランジュ形式から導出される場の交換関係の場合, それらは等しい時間を選び出しているので, 共変性はあまり明白ではない. 実の Klein-Gordon 場を典型的な例として取り上げて, 交換関係の共変性を説明しよう. それには 2 つの任意の時空点 x と y の場合の交換子 $[\varphi(x), \varphi(y)]$ を計算してみる. この交換子はスカラーなので, それはある不変な関数に等しいはずである.

$\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ と書くとき, 次となることに注意する：

$$\big[\varphi^+(x), \varphi^+(y)\big] = \big[\varphi^-(x), \varphi^-(y)\big] = 0 \tag{3.36}$$

なぜなら $\varphi^+(\varphi^-)$ は消滅 (生成) 演算子だけを含んでいるからである. 従って,

$$\big[\varphi(x), \varphi(y)\big] = \big[\varphi^+(x), \varphi^-(y)\big] + \big[\varphi^-(x), \varphi^+(y)\big] \tag{3.37}$$

そして必要とするのはこの式の右辺にある最初の交換子を評価することだけである. Klein-Gordon 方程式の基本解の完全系を用いた展開式 (3.7) から, 次を得る：

$$\varphi^+(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}\right)^{1/2} a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx}, \quad \varphi^-(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}\right)^{1/2} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \to \quad \big[\varphi^+(x), \varphi^-(y)\big] &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\boldsymbol{k}'} \frac{1}{(\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'})^{1/2}} \big[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')\big] e^{-ikx+ik'y} \\ &= \frac{\hbar c^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{-ik(x-y)} \quad (V \to \infty) \end{aligned} \tag{3.38}$$

ただし極限 $V \to \infty$ を取り, 最後の積分では $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$ である. 次式を定義する：

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{-ikx} = \frac{1}{i} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\, e^{-ikx}, \quad k_0 = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}, \tag{3.39}$$

なぜなら, これとその関連した式は繰り返し出現するからである. すると式 (3.38) などは次のように書くことが出来る：

$$\big[\varphi^+(x), \varphi^-(y)\big] = i\hbar c\, \Delta^+(x-y), \tag{3.40}$$

そして,

$$\big[\varphi^-(x), \varphi^+(y)\big] = -i\hbar c\, \Delta^+(y-x) \equiv i\hbar c\, \Delta^-(x-y) \tag{3.41}$$

これは関数 $\Delta^-(x-y)$ を定義している．式 (3.40) と式 (3.41) そして式 (3.37) から, 次の交換関係が得られる：

$$\big[\varphi(x), \varphi(y)\big] = i\hbar c\,\Delta(x-y) \tag{3.42}$$

ただし $\Delta(x)$ は次で定義される：

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &\equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \Delta^+(x) - \Delta^+(-x) \\
&= \frac{1}{i}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\, e^{-ikx} - \frac{1}{i}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\, e^{ikx} \\
&= \frac{1}{i}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\, \big(e^{-ikx} - e^{ikx}\big) \\
&= -\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{k_0(2\pi)^3}\, \sin kx = \frac{-c}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \sin kx
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$\Delta(x)$ は, 式 (3.42) の交換関係から要求されるように, 実の奇関数であり, それは $\Delta^{\pm}$ のように klein-Goldon 方程式を満たす：

$$\big(\Box_x + \mu^2\big)\Delta(x-y) = 0 \tag{3.44}$$

また, 式 (3.43) の $\Delta(x)$-関数は次のように書くことが出来る：

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \delta(k^2-\mu^2)\, \varepsilon(k^0) e^{-ikx} \tag{3.45}$$

ただし $d^2k = d^3\boldsymbol{k}dk_0$ であり, また k_0-積分の積分範囲は $-\infty < k_0 < \infty$ である．そして $\varepsilon(k_0)$ は次式で定義される：

$$\varepsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1, & \text{if } k_0 > 0 \\ -1, & \text{if } k_0 < 0 \end{cases}$$

定義式 (3.43) と (3.45) が等価であることを立証するのは容易である：[$k^2 = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 = \mu^2$ より $k_0^2 = \boldsymbol{k}^2 + \mu^2$ よって $k_0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2} = |k_0|$ である]．従って, 例えば式 (3.45) 中のデルタ関数は次のように書くことが出来る：

$$\begin{aligned}
\delta(k^2-\mu^2) &= \delta\big[k_0^2 - (\boldsymbol{k}^2+\mu^2)\big] = \delta\big[k_0^2 - (\omega_{\boldsymbol{k}}/c)^2\big] = \delta\big[k_0^2 - |k_0|^2\big] \\
&= \frac{1}{2|k_0|}\big[\delta(k_0+|k_0|) + \delta(k_0-|k_0|)\big] \\
&= \frac{c}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left[\delta\left(k_0 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\right) + \delta\left(k_0 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

そして k_0-積分を実行するのである．その際に $k_0 < 0$ のときは $\boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}$ とすることで e^{ikx} とすべきことに注意すると, その結果は式 (3-43) に一致する：

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta(k^2-\mu^2)\,\varepsilon(k^0)e^{-ikx} \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\,\frac{1}{2|k_0|}\big[\delta(k_0+|k_0|)+\delta(k_0-|k_0|)\big]\,\varepsilon(k^0)e^{-ikx} \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\left[\int_{-\infty}^{0} dk_0\,\big[\delta(k_0+|k_0|)+\delta(k_0-|k_0|)\big]\,\varepsilon(k^0)e^{-ikx}\right. \\
&\quad\left.+\int_{0}^{\infty} dk_0\,\big[\delta(k_0+|k_0|)+\delta(k_0-|k_0|)\big]\,\varepsilon(k^0)e^{-ikx}\right] \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}'\,\varepsilon(-|k^0|)e^{-ik'x}+\frac{-i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\,\varepsilon(|k^0|)e^{-ikx} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\,e^{ikx}+\frac{-i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\,e^{-ikx} \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|k_0|}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{k}\left(e^{-ikx}-e^{ikx}\right)=\frac{1}{i}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\left(e^{-ikx}-e^{ikx}\right)
\end{aligned}
$$

$\Delta(x)$ が本義ローレンツ変換 (すなわち空間反転も時間反転も含まれない) で, 不変であることは式 (3.45) から明らかである．なぜなら, 被積分関数中の各因子がローレンツ不変であるからだ [本義ローレンツ変換は過去と未来を交換しないので $\varepsilon(k_0)$ は不変である].

$\Delta(x)$ のローレンツ不変性は, 以前に式 (3.6) で得られた「同時刻での交換関係」[†]に新しい解釈を与えることになる：

$$\big[\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{y},t)\big]=i\hbar c\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},0)=0 \tag{3.48}$$

$\Delta(x-y)$ の不変性は次であることを意味している：

$$\big[\varphi(x),\varphi(y)\big]=i\hbar c\,\Delta(x-y)=0,\quad \text{for } (x-y)^2<0 \tag{3.49}$$

すなわち, 空間的に隔たっている任意の 2 点 x と y での場は, 交換可能である．従ってもし場が物理的なオブザーバブルであるならば, 空間的に隔たっている 2 地点での場の測定は互いに干渉しないはずである．これは「微視的因果律」として知られている．なぜなら, どんなに小さくとも空間的に隔たっていると信号が干渉を引き起こすためには光の速度よりも早い速度で移動しなければならないが, それは特殊相対論に反することだからである．§ 4.3 に於いてス

[†] この式は式 (3.43) から直接導くことも出来る．$x^0 = 0$ のとき, 被積分関数は k の奇関数となるからである．

ピンと統計間の関係を議論するとき, 微視的因果律の条件式 (3.49) は基本的な重要性を持っており, それは場自体が物理的オブザーバブルでない場合でさえもそうである.

Δ-関数の特に有益な表現方法は複素 k_0-面内での線積分 (contour integral) である. 関数 $\Delta^{\pm}(x)$ は次式で与えられる：

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^{\pm}} \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2} \, e^{-ikx} \tag{3.50}$$

ただし図 3.1 に示されているように, 線路 C^+ と C^- は各々 Δ^+ と Δ^- に対するものである.

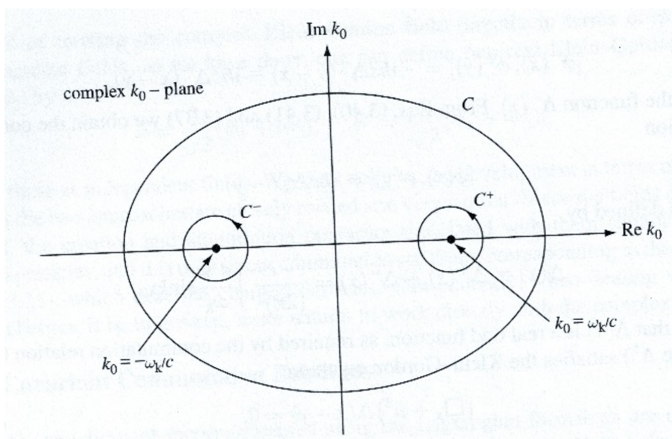

図 2　関数 $\Delta^{\pm}(x)$ と $\Delta(x)$ の積分表現式 (3.50) の線路

線積分を実施すると, それは $k_0 = \pm\omega_{\boldsymbol{k}}$ にある極の一方か他方から留数 (residue) を拾い上げ, そして式 (3.50) は $\Delta^{\pm}(x)$ の定義式 (3.39) と (3.41) に帰着する. 関数 $\Delta(x)$ の式 (3.43) は図 3.1 に示されている経路 C を持った同じ積分 (3.50) で表現される. 他の Δ-関数は, 別の経路を選択することで得ることが出来る.

【 例題 】例として $\Delta^+(x)$ を求めてみよう. 線路は特異点 $k_0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c$ の周りの C^+ である. 式 (3.50) から,

$$\Delta^+(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{dk'_0}{k'^2 - \mu^2} \int d^3\boldsymbol{k}' \, e^{-ik'x} \tag{1}$$

このとき,

$$k'^2 - \mu^2 = k'^2_0 - \boldsymbol{k}'^2 - \mu^2 = k'^2_0 - k^2_0, \quad \text{where} \quad k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + \mu^2} = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}$$

であるから, 複素 k_0' 面内での線積分は次に書ける：

$$\int_{C^+} \frac{dk_0'}{k'^2-\mu^2} = \int_{C^+} f(k_0')\,dk_0', \quad f(k_0') = \frac{1}{k_0'^2-k_0^2} = \frac{1}{2k_0}\left(\frac{1}{k_0'-k_0} - \frac{1}{k_0'+k_0}\right)$$

従って, 特異点 k_0 での留数は $\mathrm{Res}[f(k_0'), k_0] = \dfrac{1}{2k_0}$ であるから,

$$\int_{C^+} f(k_0')\,dk_0' = i2\pi \mathrm{Res}[f(k_0'), k_0] = \frac{i2\pi}{2k_0} \tag{2}$$

よって, 式 (1) は式 (3.39) に一致する：

$$\begin{aligned}
\Delta^+(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} f(k_0')\,dk_0' \int d^3\boldsymbol{k'}\,e^{-ik'x} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^4}\frac{i2\pi}{2k_0}\int d^3\boldsymbol{k'}\,e^{-ik'x} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3}\frac{i}{2k_0}\int d^3\boldsymbol{k'}\,e^{-ik'x} \\
&= \frac{1}{i}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k_0(2\pi)^3}\,e^{-ikx} \qquad (3.39')
\end{aligned}$$