

8 スピンレスボソンの量子電気力学

8.1 The Klein-Gordon Equation

まずはスピン 0 粒子に対する相対論的波動方程式の性質のいくつかを思い出そう。自由スカラー粒子に対する波動関数 $\phi(x)$ は Klein-Gordon 方程式に従う：

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2\right) \phi(x) = 0 \quad (8.1)$$

関係する「カレント密度ベクトル」 j_μ は連続方程式を満たす：

$$j_\mu \equiv ie(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) \equiv ie\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi, \quad \rightarrow \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \quad (8.2)$$

ディラック方程式の場合と対照的に、ここでは電荷密度 j_0 には正負の両符号が適用できる。式 (8.1) の解の完全系は正および負の固有周波数と運動量を持つ 2 組の平面波から成り立っている：

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{(+)} = N_p e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (8.3a)$$

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{(-)} = N_p e^{+i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \quad (8.3b)$$

ただし、

$$E_p = +\sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2} \quad (8.4)$$

規格化は、「保存量」(conserved quantity) である全電荷 $Q = \int d^3x j_0(\mathbf{x}, t)$ を通して決定できる。正の周波数を持つ解の電荷は値 $Q = +e$ に固定し、それに対し負の周波数を持つ解には $Q = -e$ を要求する。従って一般的に Klein-Gordon 方程式は正および負の電荷を持つ粒子と反粒子、例えば π^- 中間子と π^+ 中間子の寄与の重ね合わせを記述する。(中性スカラー粒子はここでは考慮しない)。後でこれらの寄与の物理的解釈に戻ろうと思う。

「 δ 関数に至る」連続的規格化の場合、次を選択しなければならない：

$$N_p = \sqrt{\frac{1}{2E_p (2\pi)^3}} \quad (8.5)$$

そして平面波に対する直交関係は次となる：

$$\int d^3x \varphi_{\mathbf{p}'}^{(\pm)*}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(x) = \pm \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (8.6a)$$

$$\int d^3x \varphi_{\mathbf{p}'}^{(\pm)*}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}}^{(\mp)}(x) = 0 \quad (8.6b)$$

一般的に、式 (8.2) は以下のような仕方による修正された「スカラー積」 $(\phi_2|\phi_1)$ を定義する：

$$(\phi_2|\phi_1) := \int d^3x \phi_2^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_1(x) \quad (8.7)$$

このとき、正值条件 $(\phi|\phi) \geq 0$ はもはや有効ではない。

電磁場との相互作用は、通常通りに「ミニマル結合」(*minimal coupling*) 処方によって導入される：

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu$$

従って、電磁場が存在する場合の Klein-Gordon 方程式は次となる：

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - m_0^2]\phi(x) = 0 \quad (8.8)$$

または、

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2]\phi(x) = -\hat{V}\phi(x) \quad (8.9)$$

ここではポテンシャル演算子 \hat{V} を形式的に導入した。明示的に表すと次となる：

$$\hat{V}\phi = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\phi - e^2 A^\mu A_\mu \phi \quad (8.10)$$

Klein-Gordon 方程式は座標について 2 次なので、式 (8.9) の結合項は極めて複雑な構造を持つ。すなわち、それは勾配 ∂_μ を含み、そして 2 次の最終項のために A_μ が非線形となる。

以上に加えて、スカラー場のカレント密度も電磁ポテンシャルの存在によって修正される。すなわち、

$$j_\mu = ie\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi - 2e^2 A_\mu \phi^* \phi \quad (8.11)$$

式 (8.9) は、ポテンシャル A_μ 下でのスカラー粒子散乱を計算するのに利用できる。スピノル QED に関する我々の経験は、自由 Klein-Gordon 方程式の「伝搬関数 (propagator) を用いた摂動論」の発展を示唆している。

8.2 スカラー粒子の Feynman 伝搬関数

第 2 章に於ける Dirac 方程式の考察と全く同じ類推から、点状の単位源についての Klein-Gordon 方程式を解く伝搬関数 $\Delta_F(x' - x)$ を定義する：

$$(\partial'^\mu \partial'_\mu + m_0^2) \Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x) \quad (8.12)$$

式 (8.9) の相互作用項も負符号なので、右辺の源項にマイナス符号を選択するのは当然である。この微分方程式の解は、いつも通り次のフーリエ変換により得ることが出来る：

$$\Delta_F(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x' - x)} \frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (8.13a)$$

すなわち、運動量空間に於いては

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (8.13b)$$

ここではやはり $p^2 = m_0^2$ の極を避けるための Stückelberg-Feynman 処方を用いた。「これが意味するのは、正の周波数 $E_p = \omega$ を持つ波動関数は時間を前方に (未来方向に) 伝搬し、他方負の周波数 $-E_p = -\omega$ を持つ波動関数は時間を後方に (過去方向に) 伝搬すること」というのはすぐ納得出来る。スピン 1/2 の Feynman 伝搬関数 S_F との関係は非常に簡単である。すなわち、

$$S_F(x' - x) = (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_0)\Delta_F(x' - x) \quad (8.14)$$

波動関数に対する伝搬関数の作用を調べるために、まずは $\Delta_F(x' - x)$ を解 (8.3) の完全集合の和で表現してみる。この目的のために式 (8.13) の p_0 -積分を留数定理の助けを借りて行なう。その際 $t' > t$ ($t' < t$) のときの経路は下 (上) 半面で閉じられる。この計算は Dirac 粒子の Feynman 伝搬関数について書かれた第 2 章の始めと全く同様に行なう。すると次を得る：

$$\begin{aligned} \Delta_F(x' - x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x' - x)} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t' - t)}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} \\ &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip \cdot (x' - x)}}{2E_p} \left[\Theta(t' - t) e^{-iE_p(t' - t)} + \Theta(t - t') e^{+iE_p(t' - t)} \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

式 (8.3) を用いると、これは次のように書ける：

$$\Delta_F(x' - x) = -i\Theta(t' - t) \int d^3 p \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x') \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)*}(x) - i\Theta(t - t') \int d^3 p \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x') \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)*}(x) \quad (8.16)$$

ただし 2 番目の積分では $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ の置き換えを行った。

さて今度は、正周波数を持つ部分と負周波数を持つ部分 (contribution) から成る一般的な波動関数 $\phi(x)$ を考える：

$$\phi(x) = \int d^3 p a_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) + \int d^3 p b_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) \equiv \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (8.17)$$

そして伝搬関数 $\Delta_F(x'-x)$ を作用させる．修正スカラー積 (8.7) を利用するために，演算子 $i\overleftrightarrow{\partial}_0$ を伝搬関数と波動関数の間に挟み込む：

$$\int d^3x \Delta_F(x'-x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) = -i \int d^3p \left(\Theta(t'-t) \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x') \int d^3x \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)*}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right. \\ \left. + \Theta(t-t') \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x') \int d^3x \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)*}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right) \quad (8.18)$$

さてここで $\phi(x)$ を式 (8.17) に従って成分に分解すると，直交関係 (8.6a,b) が適用できる．結果は，推測した通りになる：

$$\int d^3x \Delta_F(x'-x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) = -i\Theta(t'-t)\phi^{(+)}(x') + i\Theta(t-t')\phi^{(-)}(x') \quad (8.19)$$

この結果は，第 2 章の Dirac スピノルに対して導出された式 (2.25) と式 (2.26) と完全に類似している．

8.3 スピン 0 ボソンの散乱

第 3 章の流れに沿うと，スピン 0 ボソンの散乱過程もやはり伝搬関数の助けを借りて扱うことが出来る． $\Delta_F(x'-x)$ を x と x' 間の点線で表現しよう．例えば，Fig.8.1(a) では $t' > t$ として自由ボソンが点 (\mathbf{x}, t) から点 (\mathbf{x}', t') まで運動する．それは正エネルギーを，従って電荷 $Q = +e$ を持つ粒子である．簡便のため，パイオン (つまり $e = -|e|$ とする慣習により π^-) について述べる．摂動ポテンシャル \hat{V} の影響下で，その粒子は (\mathbf{x}_1, t_1) で散乱され得る (Fig.8.1(b))．粒子は数回散乱されることも有り得る (Fig.8.1(c))．しかし後者の場合，伝搬関数 $\Delta_F(x_2 - x_1)$ は時間順序 $t_2 < t_1$ も許される．それは π^- が図 8.2a のように x_1 から x_2 まで時間を遡って伝搬することを意味する．しかし物理的に言えば，点 x_1 で時間を遡って放出された粒子 π^- はまるで反粒子 π^+ が吸収されたのと同じ効果を示す (render)．従って，正負両方の電荷を持った粒子たちが皆時間を前方へと伝搬することが起こるため，図 8.2b の形の Feynman グラフを描くことも出来る．この言い方では，図 8.2 の過程は π^- が入射し，点 (\mathbf{x}_2, t_2) で $\pi^- \pi^+$ ペアが生成されることを意味している．その後 π^+ は入って来た π^- と点 (\mathbf{x}_1, t_1) で消滅するのだが，別の π^- が未来に向かって伝搬し続ける．

これはスピノール電気力学の場合と完全に類似している．単に名称 π^\pm と e^\pm を変更するだけでよい．しかしながら違いが一つある．ボソンは Pauli の排他原理に従わないので，「Dirac の空孔描像を用いることは出来ない」．すなわち π^+ を π^- の海中の空席であり他の状態は完全に埋まっていると解釈することは意味を成さない．

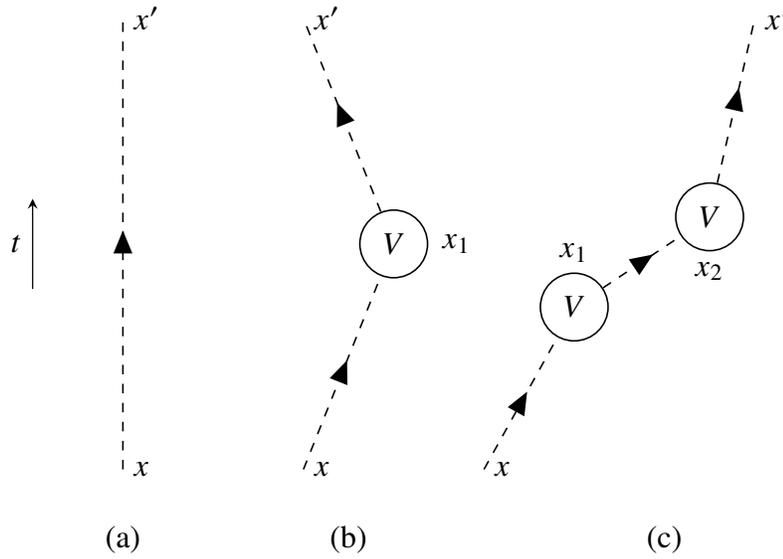


図1 Fig. 8.1 ボソンの自由伝搬とその散乱

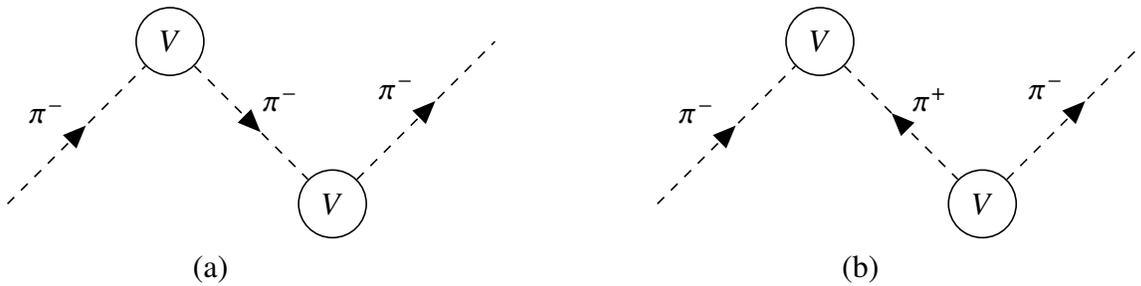


図2 Fig. 8.2 時間を過去に向かって移動する π^- は π^+ である.

従って、この補助的概念に頼る (have recourse to) ことなく、我々は Feynman 解釈：「4 元運動量 p^μ を持つ粒子の放出 (吸収) は、物理的に 4 元運動量 $-p^\mu$ を持つ反粒子の吸収 (放出) に等価である」を全ての粒子 (ボソンとフェルミオンの両方) に対する公理として定式化する。

次はこれらの考察に対する量的な公式化を与え、散乱過程に対する S 行列を計算しよう。その目的のためには、摂動ポテンシャル $\hat{V}(x)$ が式 (8.10) で与えられるときの波動関数 $\phi(x)$ に対する Klein-Gordon 方程式 (8.9) を解く必要がある。式 (8.12) から Feynman 伝搬関数を利用すると次式を得る：

$$\phi(x) = \varphi(x) + \int d^4y \Delta_F(x-y) \hat{V}(y)\phi(y) \quad (8.20)$$

ただし $\varphi(x)$ は自由波を表しており $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0$ を満たす。粒子が散乱されて

$p_i \rightarrow p_f$ となる場合、波動関数 $\phi(x)$ は次の境界条件を満たす必要がある：

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \varphi_{p_i}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{for } t \rightarrow -\infty$$

S 行列は $t \rightarrow +\infty$ の時の終状態 $\varphi_{p_f}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ への射影によって得られる：

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\varphi_{p_f}^{(+)}(\mathbf{x}) | \phi_{p_i}(\mathbf{x}) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{p_i}(\mathbf{x}, t) \quad (8.21)$$

Feynman 伝搬関数の表現式 (8.16) と式 (8.20) を用いると、この表式に対して次を得る：

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \left(\phi_{p_i}(\mathbf{x}, t) + \int d^4y \Delta_F(x-y) \hat{V}(y) \phi_{p_i}(y) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{p_i}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \left(\int d^4y d^3p (-i) \Theta(t-t_y) \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)*}(y) \hat{V}(y) \phi_{p_i}(y) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{p_i}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - i \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3p \underbrace{\left(\int d^3x \varphi_{p_f}^{(+)*}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) \right)}_{=+\delta^3(p_f-p)} \int d^4y \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)*}(y) \hat{V}(y) \phi_{p_i}(y) \quad (8.22) \end{aligned}$$

これは、平面波に対する直交関係式 (8.6) により次となる：

$$S_{fi} = \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - i \int d^4y \varphi_{p_f}^{(+)*}(y) \hat{V}(y) \phi_{p_i}(y) \quad (8.23)$$

反粒子の散乱 $p_i \rightarrow p_f$ に関係するときにはいつも、負の 4 元運動量 $-p_f$ が過去に遡って伝搬し $t \rightarrow -\infty$ で $\varphi_{p_i}^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ に射影する：

$$S_{fi} = - \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\varphi_{p_i}^{(-)}(\mathbf{x}) | \phi_{p_f}(\mathbf{x}) \right) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x \varphi_{p_i}^{(-)*}(\mathbf{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{p_f}(\mathbf{x}, t) \quad (8.24)$$

ただしマイナス符号は単なる慣例に過ぎない。ここで次のことが明らかとなる：「純粹に計算的な視点から言って、反粒子は運動量 p_f で相互作用領域に入り込み、運動量 p_i で離れて行く」。従って次を得る：

$$S_{fi} = \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - i \int d^4y \varphi_{p_i}^{(-)*}(y) \hat{V}(y) \phi_{p_f}(y) \quad (8.25)$$

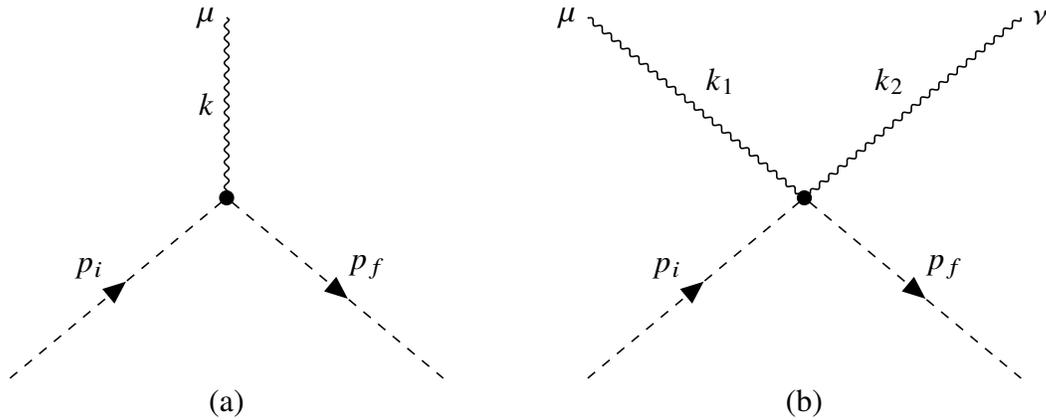


図3 Fig. 8.3 光子とスピン 0 ボソン間のカップリングに対する 2 つの節点

対消滅と対生成は完全に類似した仕方で計算することが出来る.

$\phi(y)$ に対する積分方程式 (8.20) に加えて, 表式 (8.23) と表式 (8.25) はやはり「摂動展開」を提起する: n ステップ目の繰り返しに於いては, 波動関数 $\phi^{(n)}$ を式 (8.20) の右辺に挿入して $(n+1)$ 番目の近似式 $\phi^{(n+1)}$ を計算する. 一連の (形式的な) 散乱摂動の場合, 次が得られる:

$$S_{fi} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{fi}^{(n)} \quad (8.26a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x_n \cdots \int d^4x_1 \varphi_{p_f}^{(+)*}(x_n) (-i) \hat{V}(x_n) i \Delta_F(x_n - x_{n-1}) (-i) \hat{V}(x_{n-1}) \cdots \varphi_{p_i}^{(+)}(x_1) \quad (8.26b)$$

しかしここで, スピン-1/2 理論の類似する公式と重要な差異が生じる. 展開式 (8.26a) では電荷 e のべき級数の形であるが, ここではもはやそうではない: 各項 $S_{fi}^{(n)}$ は e^n と e^{2n} 間のべきの混合を含む. 結合の強さ e での展開, それは摂動理論を実行する理にかなったやり方である, を保ちたいのであれば, 様々な寄与を再配列しグループにまとめなければならない. その理由は式 (8.10) の相互作用ポテンシャル \hat{V} の形に見出すことが出来る. それは線形項 eA と 2 次項 $e^2 A^2$ の両方を含んでいるからである.

この \hat{V} の特性は, 摂動展開の項が Feynman グラフで表される場合にも重要な帰結をもたらす. スカラー電気力学の場合, 図 8.3 に示すように「2 種類の光子節点 (バーテックス)」が存在する. (図 8.3b) の 4 本足の節点 (その形から「カモメ節点」として知られてもいる) によると, ボソンは 2 つの光子を同時に吸収または放出できる. 従って, スピノル QED とは対照的に, このときはより豊富な Feynman グラフの動物学が過程に寄与する. しかしながら, 2 光子

節点は因子 e^2 を含む：従って、最低次の計算で十分であるならば、その寄与は状況が許されるなら取り除くことが出来る (そうは出来ない例は問題 8.2 を見よ!).

さて次は Feynman グラフを評価する際に節点にどんな数学的因子を割り当てたら良いかを調べよう. その目的のために,(展開式 (8.26) に従って) 1 次の S 行列要素を構成する:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= \int d^4x \varphi_f^{(+)*}(x) (-i) \hat{V}(x) \varphi_i^{(+)}(x) \\
&= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}} e^{+ip_f \cdot x} \left[e (\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) + ie^2 g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \right] e^{-ip_i \cdot x} \\
&\equiv S_{fi}^{(1a)} + S_{fi}^{(1b)} \tag{8.27}
\end{aligned}$$

e について線形な寄与は、部分積分によって簡単化することが出来る:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(1a)} &= \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i} (2\pi)^3} \int d^4x e^{ip_f \cdot x} e (\partial^\mu A_\mu + A_\mu \partial^\mu) e^{-ip_i \cdot x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i} (2\pi)^3} \int d^4x e \left[-(ip_f^\mu) + (-ip_i^\mu) \right] A_\mu(x) e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \\
&= \left[(-ie)(p_f^\mu + p_i^\mu) \right] \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i} (2\pi)^3} A_\mu(p_f - p_i) \tag{8.28}
\end{aligned}$$

第 2 行では、無限大での表面積分は発散 $\partial^\mu (e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A_\mu(x))$ に由来する (部分積分により生じる) が、これは消失する. 従って図 8.3a の 1 光子節点には因子 $-ie(p_f^\mu + p_i^\mu)$ を割り当てる. この表式は電子-光子-節点での因子 $-ie\gamma^\mu$ と同じ役割を演じる. さらに, S 行列要素は、平面波の規格化からの因子と運動量移行 $q = p_f - p_i$ でフーリエ変換された電磁ポテンシャル $A_\mu(q)$ を含んでいる. 式 (8.27) 中の 2 次結合は次となる:

$$S_{fi}^{(1b)} = (ie^2 g_{\mu\nu}) \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i} (2\pi)^3} \int d^4x e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A^\mu(x) A^\nu(x) \tag{8.29}$$

ベクトルポテンシャルの積のフーリエ変換は、運動量空間中では畳み込み積分に変わることが出来る:

$$S_{fi}^{(1b)} = (ie^2 g_{\mu\nu}) \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i} (2\pi)^3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A^\mu(q - k) A^\nu(k) \tag{8.30}$$

式 (8.29) と式 (8.30) の解釈には気をつけなければならない. なぜなら、この節点では 2 つの別々の光子の放出または吸収があるからである. 従って A^μ 場は 2 つの部分を含んでいる. それらを $A^\mu(1)$ と $A^\mu(2)$ と呼ぶことにし、2 乗をする場合は混合した項だけを考慮する:

$$A^\mu A_\mu = (A^\mu(1) + A^\mu(2))(A_\mu(1) + A_\mu(2)) \rightarrow A^\mu(1)A_\mu(2) + A^\mu(2)A_\mu(1) = 2A^\mu(1)A_\mu(2) \tag{8.31}$$

というのは、1つの光子が2回相互作用することは出来ないからである。この理由で因子2を追加することになる。よって図 8.3b から2光子節点には因子 $2ie^2g_{\mu\nu}$ を割り当てなければならない。それにはお馴染みの規格化因子と2つの光子場の積を掛け合わせなければならない。

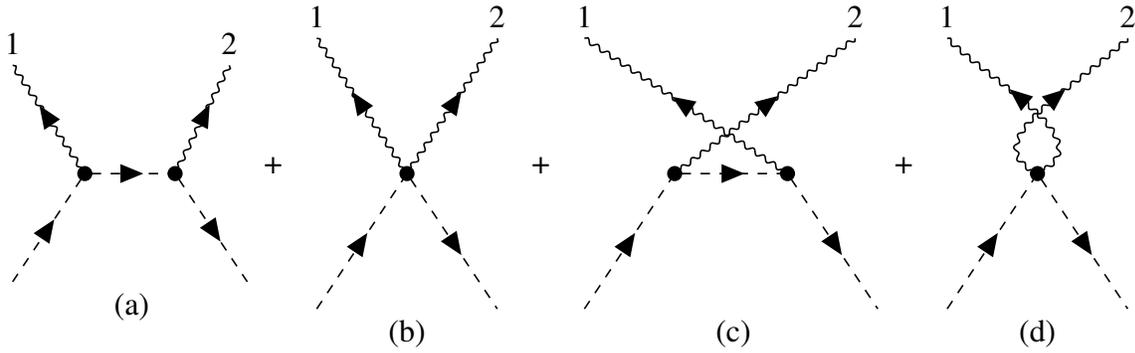


Fig. 8.4

e の2次過程, 例えば対消滅の場合に対する可能な全ての Feynman グラフを描くと, 因子2の付加の必要性は更に明白となる。図 8.4 に見られるように, 2つの光子が放出される。これらは区別できないボース粒子であるから, 最終状態は対称的になっているべきである。2つの別々の放出がある図 8.4a の場合, これは交換したグラフ図 8.4c となる。2-光子節点の場合でも, 2つの光子は異なるやり方で関係することが出来る。しかし交換したグラフ図 8.4d は図 8.4b と同じ構造をしているので, 簡単に節点因子を2倍した値 $2ie^2g_{\mu\nu}$ とすることで説明が着く。このルールは任意の過程に一般化出来るが, しかし一つの例外がある: グラフが図 8.5 にあるような「閉じた光子ループ」を含む場合である。ここでも対称化が実行され因子2が生じる。しかしもし両方の節点に $2ie^2g_{\mu\nu}$ を用いると, 1つが2回数えられることになる。従ってこれを訂正するには, どの閉じた光子ループにも因子 $1/2$ を掛け合わせることが必要である。

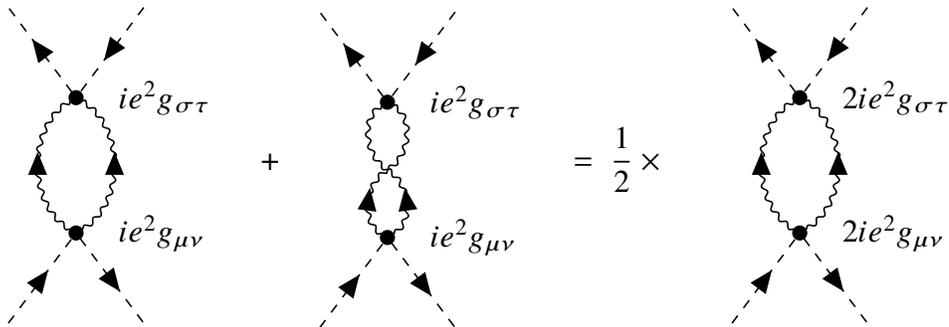


Fig. 8.5

式 (8.27) の電磁場 A_μ は、スピン-0 ボソンの遷移カレント j_{fi} も源として持つことが出来る：

$$A^\mu(x) = \int d^4y D_F(x-y) j_{fi}^\mu(y) \quad (8.32)$$

ここでもやはり式 (8.11) によりオーダー e と e^2 の 2 項が遷移カレント中に生じる。それは図 8.3 中のグラフに相当する。これはそうであるべきである。なぜなら結果は仮想光子の吸収と放出を交換した場合に対称的であるべきだからである。

修正した節点因子と伝搬関数を例外として、断面積計算のための更なるステップは全て第 3 章と同様に進められる。スピン-1/2 理論と比較すると、計算は相当に簡単化される。なぜならもう粒子偏極についての和を取る必要がないし、 γ 行列の代数も必要でないからである。

さて今度は、時間依存しない「外部クーロンポテンシャル」下での (構造のない) パイオン^{*1} の散乱の場合を考察しよう。§ 3.1 によれば、断面積は次で与えられる：

$$d\sigma = \frac{1}{j_{in}} \frac{|S_{fi}|^2 V d^3 p_f}{T (2\pi)^3} \quad (8.34)$$

1 次の S-行列要素はすでに式 (8.27) で与えられている。フーリエ変換されたクーロンポテンシャルは次式となる：

$$A_\mu(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \frac{-Ze}{|\mathbf{x}|} g_{\mu 0} = 2\pi\delta(q_0) \frac{-4\pi Ze}{|\mathbf{q}|^2} g_{\mu 0} \quad (8.34)$$

式 (8.5) の規格化すなわち $N_p = 1/\sqrt{2E_p V}$ の代わりに、有限体積 V の箱中に一粒子という規格化を用いるならば、入射 (粒子) カレントは次で与えられる：

$$j_{in} = -\varphi_{p_i}^{(+)} i \overleftrightarrow{\nabla} \varphi_{p_i}^{(+)} = -i \frac{1}{2E_i V} (2i\mathbf{p}) = \frac{1}{V} \frac{\mathbf{p}_i}{E_i} = \frac{\mathbf{v}_i}{V} \quad (8.35)$$

いつもの置き換え $(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 \rightarrow T2\pi\delta(E_f - E_i)$ を用いると、断面積は次となる：

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V}{|\mathbf{v}_i|} \frac{1}{T} \left| (-ie) \frac{(E_f + E_i)}{\sqrt{2E_f 2E_i V^2}} 2\pi\delta(E_f - E_i) \frac{-4\pi Ze}{|\mathbf{q}|^2} \right|^2 \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{4Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p_f}{|\mathbf{v}_i|} \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (8.36)$$

^{*1} [訳註] 生成 AI によれば、「Structureless pion(構造のないパイ中間子)」とは、物理学の理論モデルに於いて π 中間子の内部構造 (クォークとグルーオンからなる構造) を無視し、点粒子として扱う近似手法のことである。

従って立体角要素 $d\Omega_f$ 中に散乱される場合の微分散乱断面積は次となる：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \int \frac{|\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f|}{|v_i|} \delta(E_f - E_i) \frac{4Z^2\alpha^2}{|\mathbf{q}|^4} = \frac{4Z^2\alpha^2 E^2}{|\mathbf{q}|^4} \quad (8.37)$$

運動量移行は $|\mathbf{q}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta/2$ であるので、式 (8.37) は重心系に於ける散乱角 θ の関数として書き換えることが出来る：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (8.38)$$

この結果を § 3.1 の結果と比較すると、電子散乱には付加因子 $(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)$ が含まれていることに気付く。この相違 (discrepancy) はスピン-1/2 粒子の磁気モーメントに起因する。低速度の極限では両者の結果は一致する。なぜなら、そのとき磁気相互作用は無視できるからである*2。

*2 [訳註] § 3.1 の結果式 (3.39) はよく知られた「Mott 散乱公式」になっており、それは極限 $\beta \rightarrow 0$ (小さい速度) で「Rutherford 散乱公式」となる。 $\beta = v/c = v$ を用いると式 (8.38) はラザフォード散乱公式 (3.40) に一致する：

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{Z^2\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{Z^2\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$