

1.7 相対論的力学

相対論的力学で導かれる結果をまとめておく。ただし、粒子の質量を m 、粒子の運動量を \mathbf{p} 、粒子の速さを \mathbf{v} 、粒子の全エネルギーを E 、粒子の運動エネルギーを K とする。また、粒子の「静止エネルギー」を m_0 とする。

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (1.53)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0\mathbf{v}, \quad (1.56)$$

$$K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) \quad (1.62)$$

$$E = mc^2 = K + E_0 = \gamma m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.65)$$

$$E_0 = m_0c^2 \quad (1.66)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4, \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \quad (1.69)$$

粒子の速度が光速に比べて非常に遅い場合すなわち $v \ll c$ ($\gamma \rightarrow 1$)、または $K \ll m_0c^2$ の場合は古典的に扱える。このとき、相対論の式は古典力学の式になる：

$$m \simeq m_0, \quad p \simeq m_0v, \quad K \simeq \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (1.70)$$

式 (1.56) と式 (1.65) から、粒子が光速 c に近い速度で運動する場合は、

$$E = mc^2, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}E \xrightarrow{v \simeq c} \frac{E}{c} \quad (1.72)$$

粒子が光速で運動する、すなわち $v = c$ ($\gamma = \infty$) とすれば、式 (1.53) から $m = \infty$ となり、これは有り得ないことである。従って物質粒子を光速にすることは出来ないと言える。しかし $v = c$ で $m = 0$ と仮定すればこの難点は除かれる。従って静止質量がゼロの粒子だけが $v = c$ で進むことが出来る。この場合、

$$m_0 = 0, \quad K = E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (1.73)$$

が成り立つ。アインシュタインによれば、式 (1.73) の特徴を持つ粒子はもちろん実在のものであって、それが周波数 ν の「光子」である。

2.7 コンプトン効果

「コンプトン効果」すなわち「コンプトン散乱」とは、自由電子による X 線 (一般には電磁波) の散乱である。古典電磁気学によれば、振動数 ν の電磁波が自由電子のような自由な荷電粒子の集まりに入射するとき、粒子は電磁波を吸収して振動数 ν で振動する。そしてこれらの振動電荷は、同じ振動数 ν の電磁波を次々に再放射する。この型の散乱には波長の変化がないので「**可干渉性散乱**」と呼ばれている。この散乱は、電磁波の可視領域あるいはそれ以上の長波長領域で観測されている。

しかし X 線のように波長が非常に短い電磁波の散乱を観測してみると、古典理論からの予測は成り立たなくなる。散乱された X 線は、二通りの振動数、すなわち元の振動数 ν (波長 λ) と別の振動数 $\nu' < \nu$ (波長 $\lambda' > \lambda$) のものから成っていることが見出されるのである。このときの λ を

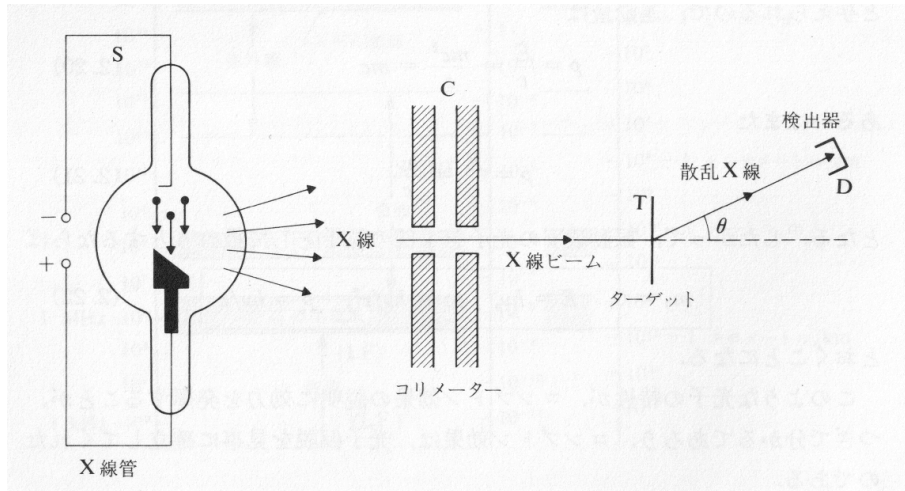


図 2.1: コンプトン散乱を観測する実験装置の模式図

「偏移しない波長」, λ' を「偏移した波長」と呼ぶことにしよう. この型の散乱は「非干渉性散乱」と呼ばれる.

X線の散乱に偏移した波長が現れることについて, 正しい説明を与えたのはアメリカの物理学者コンプトン (A.H. Compton) であって1922年のことである (彼はこれにより1927年にノーベル賞を受けた). コンプトンは量子仮説を採用し, 運動量とエネルギーの保存則を使って, 波長が非常に短い放射線に現れる振動数 (波長) の変化を求めることが出来たのである. この結果, 「光子仮説が確認される」に至り「電磁波の粒子的な振舞い」が確かなことになったのである.

図 2.1 はコンプトン散乱を観測するための実験装置を示したものである. X線源 S は X線管であって, ここで単一波長の X線ビームを発生させる. それをスリット系 C によって, 特定の進行方向に揃えた後, ターゲット T に入射させる. ターゲットは炭素のようなもので作られ, その中の電子はゆるく束縛されていて「ほとんど自由である」と仮定してよい (波長 1\AA の X線のエネルギーは 12.4 keV である. 炭素の外殻電子の束縛エネルギーは 11 eV であるので, 無視することが出来る). 散乱 X線の波長を色々な角度で測定する. その測定結果を図 2.2 に示してある. その図で λ は偏移しない波長, λ' は偏移した波長である. 図上の点は測定値で, 曲線はコンプトンが量子仮説を使って予測した値である.

図 2.3 は, 静止する自由電子と入射 X線の衝突を図式化したものである. 量子仮説によれば, 入射 X線はエネルギー $E = h\nu$, 運動量 $p = h\nu/c$ の光子であって, 図 2.2 (a) のように, 静止エネルギー $E_0 = m_0c^2$ の電子に入射する. 光子と電子は「弾性衝突 (コンプトン散乱)」をして, 散乱された光子 (散乱 X線) はエネルギー $E' = h\nu' (< h\nu)$, 運動量 $p' = h\nu'/c (< h\nu/c)$ になったとする (図 2.2 (b) を見よ). 散乱された光子の波長 λ' は λ より長い. 光子のエネルギーの減少分 $h\nu - h\nu'$ は, 反跳電子の運動エネルギー K_e となる. 運動する電子の質量を m とすれば, 相対論から

$$K_e = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 \quad (2.23)$$

である. ただし $\beta = v/c$, v は反跳電子の速さである. また反跳電子の相対論的運動量 p_e は

$$p_e = mv = m\beta c = \frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2.24)$$

である.

散乱光子と反跳電子とが, 入射光子の方向となす角を, 図 2.2 (b) のように, 各々 θ, ϕ としよう. 入射光子, 散乱光子, および反跳電子の運動量の大きさは各々 $p = h\nu/c$, $p' = h\nu'/c$ および $p_e = mv$

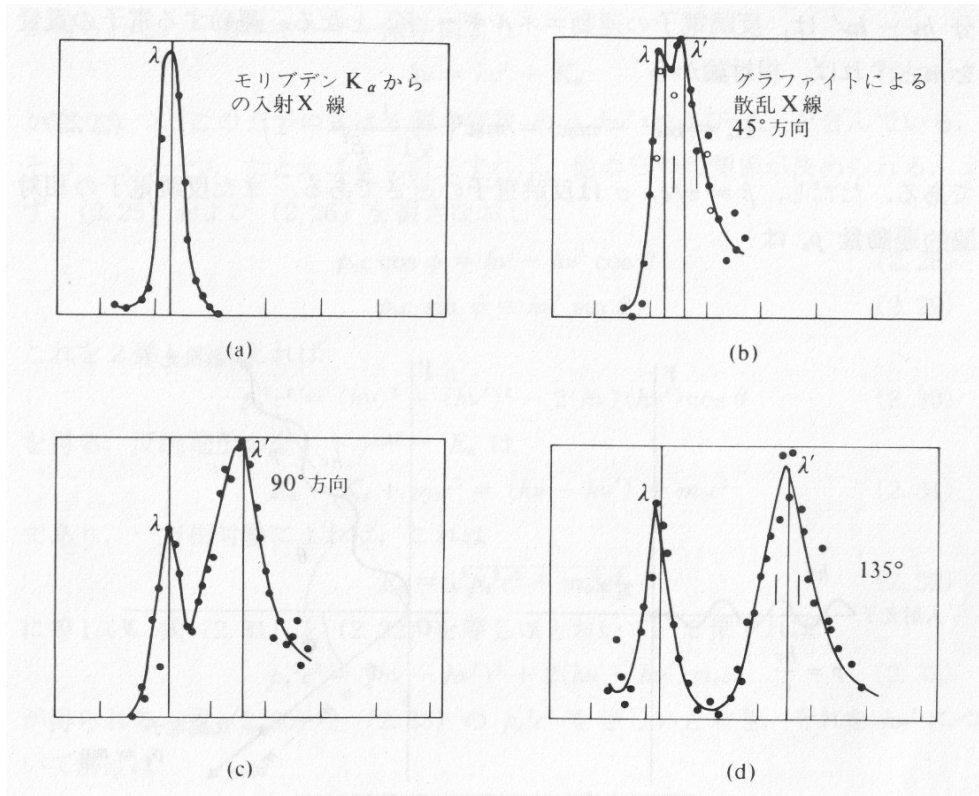


図 2.2: 散乱 X 線 (コンプトン散乱) の色々な角度に於ける波長と強さの関係. 偏移した波長 λ' と偏移しない波長 λ の両方について示されている. (A.H.Compton, *Phys. Rev.* **22**, 411 (1923) より)

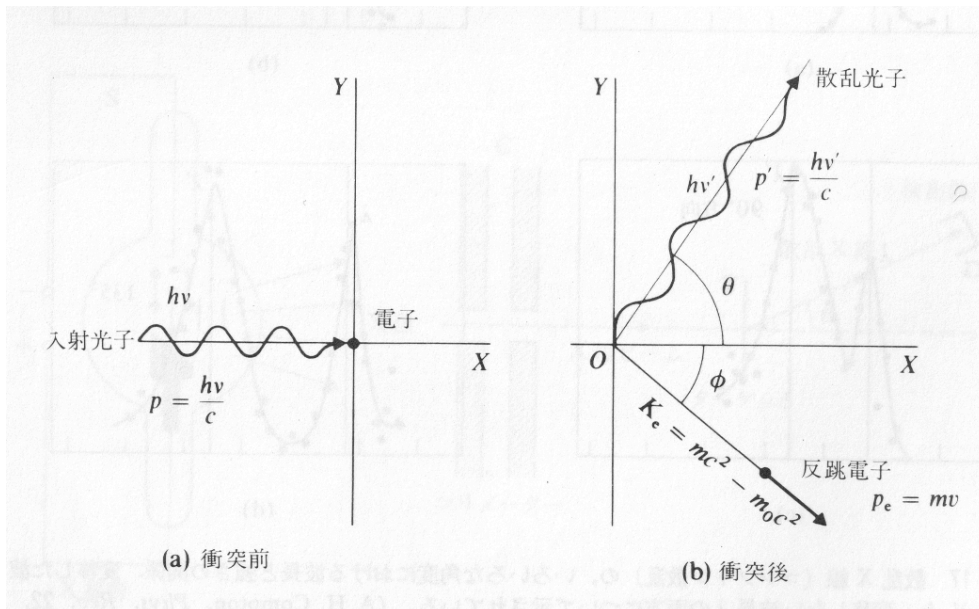


図 2.3: X 線の散乱は, 入射光子と自由電子の衝突として扱われる. (a) 衝突前, (b) 衝突後.

である. 運動量 p , p' 及び p_e を X 成分と Y 成分に分解して, 運動量保存則を適用すれば

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \tag{2.25}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi \tag{2.26}$$

が得られる¹. 一方エネルギー保存則より

$$h\nu = h\nu' + K_e \quad (2.27)$$

が成り立つ. この三つの式は4個の変数 $\theta, \phi, h\nu'$ および K_e を含んでいる. そのうちの一つ, 例えば ϕ を消去すれば, 他の三つの関係が決められる. まず式(2.25)および式(2.26)を書きなおして

$$cp_e \cos \phi = h\nu - h\nu' \cos \theta \quad (2.28)$$

$$cp_e \sin \phi = h\nu' \sin \theta \quad (2.29)$$

これを2乗して加えれば

$$p_e^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta \quad (2.30)$$

を得る. 反跳電子の全エネルギー E_e は

$$E_e = K_e + m_0 c^2 = (h\nu - h\nu') + m_0 c^2 \quad (2.31)$$

であり, 一方, 相対論によればこれは

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (2.32)$$

に等しい. 式(2.31)と(2.32)を等しいとおいて2乗すれば

$$p_e^2 c^2 = (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_0 c^2 \quad (2.33)$$

が得られる. 式(2.30)と(2.33)の $p_e^2 c^2$ を等しいとおき, それを $h\nu'$ について解けば

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (2.34)$$

が得られる. さらに式(2.34)を $\lambda\nu = \lambda'\nu' = c$ の関係を使って書き直せば, コンプトン効果による波長の変 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ を

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.35)$$

のように得ることができる². このように, 偏移した波長 λ' は入射波の(偏移しない)波長 λ よりも長くなる. 波長の変化 $\lambda' - \lambda$ は, 自由電子の静止質量と散乱角 θ によって異なるが入射光子の波長には無関係である. $\Lambda = h/m_0 c$ なる量は, 長さの次元を持ち「**コンプトン波長**」と呼ばれている. h, m_0 及び c の値を代入すれば $\Lambda = h/m_0 c = 0.02426 \text{ \AA}$ および式(2.35)より $\lambda' = \lambda + 0.02426 \times (1 - \cos \theta) \text{ \AA}$ が得られる. 図2.2に示したように, この結果は偏移した波長のいろいろな角度での測定値によく合っている.

¹運動量保存則は次のようなベクトル方程式に書ける:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}', \quad \text{or} \quad m\mathbf{v} = \frac{\hbar\mathbf{v}}{c} - \frac{\hbar\mathbf{v}'}{c}$$

この式によって三角形ABCが定められる. これに余弦定理を適用すると,

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta \quad \rightarrow \quad p_e^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta$$

となり, 式(2.30)に一致した結果を得る.

²この式から $\theta = 0$ に対しては $\Delta\lambda = 0$ に, $\theta = 90^\circ$ に対しては $\Delta\lambda = \Lambda$ に, そして $\theta = 180^\circ$ に対しては $\Delta\lambda = 2\Lambda$ となることが分かる.

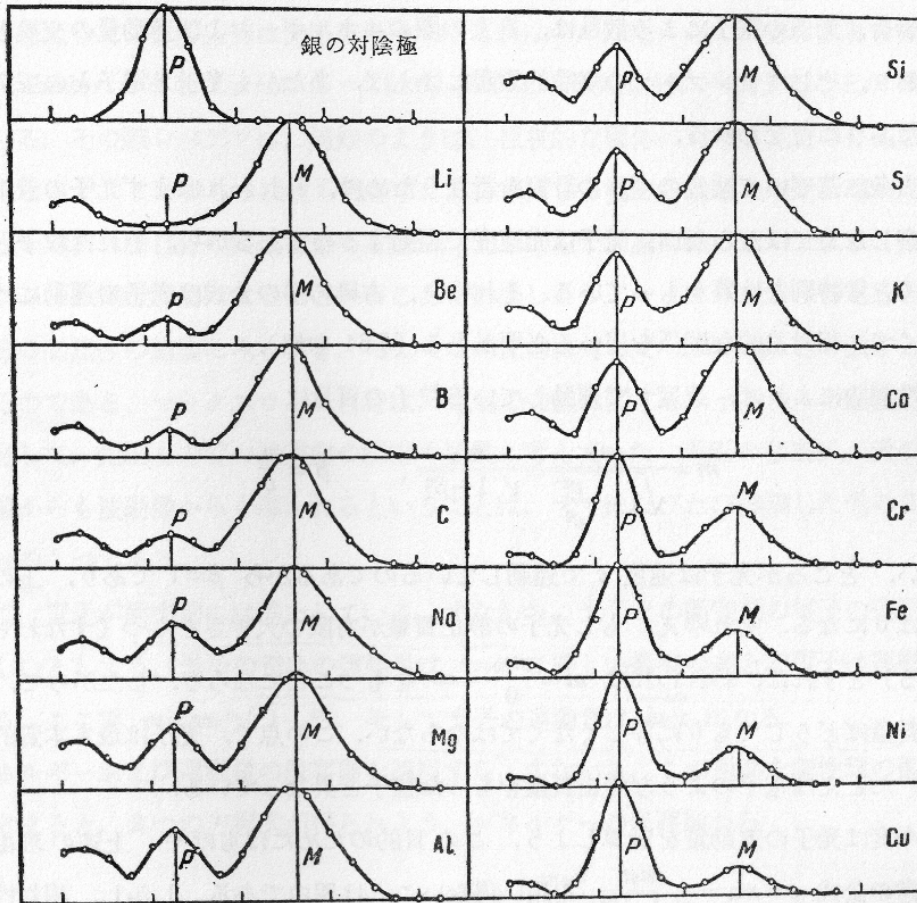


図 2.4: 銀の対陰極の K_{α} 線 (左側の初段目で $\lambda = 0.56267^{\circ}$) が色々な物質で同じ角度 (p の位置) に散乱された場合のスペクトル. (1) 偏移の大きさ (M の位置) は散乱体に依らない. (2) 散乱体の原子番号が増すと波長のずれない線 (位置 p の線) の強度は増大し, 偏移した線 (位置 M の線) の強度は減少している. 例えば, リチウム Li (左側 2 段目) では散乱された輻射はほとんど完全に波長のずれた線から成っているが, 銅 Cu (右側最下段) では偏移した線の強度はズレない線の強度に比べて小さい. (シュポルスキー: 「原子物理学」 § 125 より)

こうして, 偏移した波長の存在とその散乱角との関係は量子仮説によって見事に説明されたが, 偏移しない波長の存在 (すなわち古典論から予測される干渉性散乱) もまた説明されなければならない. これは光子仮説からは, 次のように説明される: これまで散乱は入射光子が自由電子と衝突して起ると仮定されてきた. しかし入射光子が原子に堅く束縛された内部電子の一つと衝突することによっても散乱は起こるのであろう. この場合は, 質量 m_0 の電子の代りに質量 M の原子全体が反跳を受けることになる. そこで式 (2.35) の m_0 を M に置き換える. M は最も軽い原子 (水素原子) でも $M = 1836m_0$ であって, そのコンプトン波長 $\Lambda = h/Mc$ は 0.0000133\AA 或いはそれ以下となる. したがって $\Delta\lambda$ は $\theta = 180^{\circ}$ (そこで最大値をとる) に於いても無視できるほど小さい. 以上が, 内部束縛電子による光子の散乱が波長の変化を伴わない理由である. これにより, 偏移しない波長の存在も, 偏移した波長の存在と同様に, 図 2.2 に示したようにすべての角度にわたってよく説明される³.

³図 2.4 は, 色々な物質の偏移した線及び偏移しない線の強度の比を表している. 軽い原子では全ての電子が弱く束縛されている. 反対に重い原子では外側に在る電子だけが弱く束縛されている. それゆえ, 原子番号が増すにつれて同じ観測条件の元では偏移線の強度が減少し, 偏移しない線の強度が増すのであろう.