

クライン・パラドックスの歴史と物理

A. Calogeracos

NCA Research Consultants, PO Box 61147, Maroussi 151 22, Greece
(acal@hol.gr)

N. Dombey

Centre for Theoretical Physics, University of Sussex, Brighton BN1 9QJ, UK
(normand@sussex.ac.uk)
(SUSX-TH-99-032)

概要

ディラック方程式の枠組みにおいて高いステップ状ポテンシャルによる散乱を調べたクライン、ザウター、フントによる初期の論文を検討し、クラインが最初に得た「パラドックス」を導出する。この効果を電子・陽電子対生成の観点から説明し直す。ディラック方程式における井戸型あるいは障壁型ポテンシャルは、十分に強ければ超臨界となり、陽電子あるいは電子を自発的に放出しうることを示す。井戸あるいは障壁が十分に広ければ、見かけ上一定の電流が放出される。この現象は過渡的なものであるのに対し、クラインが最初に計算したトンネル効果は時間に依存しない。障壁が放射を起こすほど高くない場合でも、電子が高い障壁に入射するには指数関数的な抑制のないトンネル効果が生じることを示す。したがってクライン・トンネリングは相対論的波動方程式の性質であり、必ずしも粒子生成と結びついているわけではない。クーロンポテンシャルについても検討し、 Z が十分大きい重い原子核は陽電子を束縛することを示す。対応して、 Z が増加するにつれてクーロン障壁は陽電子に対してますます透明になるはずである。これはクライン・トンネリングの一例である。超臨界的な陽電子放出に類似した現象は超流動 ^3He において実験的に研究できるかもしれない。

1 歴史概観

1.1 クライン・パラドックスの入門

70 年前、クライン [1] は、ディラック [2] によって発表されたばかりの新しい相対論的方程式の枠組みで、ポテンシャルステップ (図 1)

$$V(x) = V, \quad x > 0; \quad V(x) = 0, \quad x < 0 \quad (1)$$

に入射するエネルギー E 、質量 m 、運動量 k の電子に対する反射係数と透過係数を計算した論文を発表した。彼は (以下第 2 節を参照)、 V が大きい場合の反射係数・透過係数 R_S, T_S が

$$R_S = \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \right)^2 \quad T_S = \frac{4\kappa}{(1 + \kappa)^2} \quad (2)$$

で与えられることを見出した。ここで κ は運動学的因子

$$\kappa = \frac{p}{k} \frac{E + m}{E + m - V} \quad (3)$$

であり、 p は $x > 0$ での透過粒子の運動量である。式 (3) から、 $E < V - m$ のとき κ は負であるように見え、その結果、反射係数 $R_S > 1$ かつ $T_S < 0$ という逆説的な結果が得られることが容易にわかる。すなわち、入射する粒子よりも多くの粒子がステップによって反射されることになる。これが多くの論文や書籍で「クライン・パラドックス」と呼ばれているものである。しかしこれは、クラインが実際に書いたものではない。

クラインは、パウリが彼に指摘したように、 $x > 0$ において粒子の運動量が $p^2 = (V - E)^2 - m^2$ で与えられる一方、群速度 v_g は

$$v_g = dE/dp = p/(E - V) \quad (4)$$

で与えられることに注意した。したがって、透過粒子が左から右へ運動するならば v_g は正でなければならず、これは p にその負の値

$$p = -\sqrt{(V - E)^2 - m^2} \quad (5)$$

を割り当てることを意味する。この p の選択のもとで

$$\kappa = \sqrt{\frac{(V - E + m)(E + m)}{(V - E - m)(E - m)}} \quad (6)$$

となり、 $\kappa \geq 1$ であることが保証されるので、 $m \leq E \leq V - m$ の範囲で R_S と T_S はともに正またはゼロとなり、 $R_S + T_S = 1$ を満たす。それでもなおパラドックスは存在するのだろうか？ 現在においても、また、クラインに続いてこの計算を正しく行った著者たちの間でも、一般的な見解は「パラドックスは存在する」というものである。固定された E に対してポテンシャルステップ $V \rightarrow \infty$ の極限を取ると、式 (6) より κ は有限の極限值に近づき、したがって T_S もゼロでない有限の極限值に近づく。このパラドックスの物理的本質は、ディラック方程式によれば、フェルミオンが指数関数的減衰なしに強い斥力ポテンシャルを通過するという予言にある。われわれはこの過程をクライン・トンネリング [3] と呼んできた。

まずディラック方程式の 1 次元における要約から始め、ポテンシャル $V(x)$ の存在下でクラインの元々の R_S 、 T_S の結果がどのように得られるかを示す。次に、1931 年のザウターの論文（クラインのポテンシャルステップを有限の勾配を持つ障壁に置き換えた）、そして 1940 年のフントの論文（ポテンシャル強度が十分強いときにクラインのステップポテンシャルが荷電粒子対の生成を引き起こすことに気づいた）へと進む。この結果はあまり知られていないが、粒子が強い電場・重力場のもとで自発的に生成されることを示す現代の量子場理論の有名な結果、すなわちシュウィンガー [6] やホーキング [7] の結果の先駆けとなっている。第 II 部では、クライン・パラドックスの背後にある物理に立ち返り、粒子生成とクライン・トンネリングがディラック方程式から自然に生じることを示す：井戸型ポテンシャルが十分深くなると超臨界（束縛状態のエネルギーが $E = -m$ となるポテンシャル強度と定義される）となり、陽電子が自発的に生成される。超臨界性はよく理解されており [8, 9]、有限の原子核サイズを持つクーロンポテンシャルにおいて、核電荷 $Z > 137$ のときに生じうる。この機構による陽電子生成は、長年にわたり重イオン衝突における実験的研究の対象となってきた。次

に、井戸型ポテンシャルが十分広ければ、ポテンシャルが超臨界となるとき定常的だが過渡的な電流が流れることを示す。これらの過程を解析するには、真空電荷の概念を導入する必要がある。これらの概念のクーロンポテンシャルおよび他の物理現象への含意を検討し、最後にクラインが計算のために選んだ例が病的なものであったことを指摘して締めくくる。

1.2 1次元ディラック方程式

1次元では4成分のディラックスピノルを用いる必要はない。代わりに2成分のパウリスピノル[10]を用いる方がはるかに容易である。われわれは $\gamma_0 = \sigma_z$ 、 $\gamma_1 = i\sigma_x$ という規約を採用する。この選択は $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij}$ と整合する。1次元での自由ディラック・ハミルトニアンは

$$H_0 = -\sigma_y p + \sigma_z m \quad (7)$$

であり、ディラック方程式は

$$\left(\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} - E\sigma_z + m \right) \psi = 0 \quad (8)$$

の形をとる。以下では、 $\mathbf{k}$ を波数ベクトル、 k をその大きさ、 $\varepsilon = |E| = +\sqrt{k^2 + m^2}$ とする。平面波

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{ikx - iEt} \quad (9)$$

を試みて式(7)に代入する。この方程式は $A = ik$ 、 $B = E - m$ ($E = \pm\varepsilon$)で満たされる。正エネルギー（粒子）解は

$$N_+(\varepsilon) \begin{pmatrix} ik \\ \varepsilon - m \end{pmatrix} e^{ikx - i\varepsilon t} \quad (10)$$

の形を持ち、負エネルギー（ホール）解は

$$N_-(\varepsilon) \begin{pmatrix} ik \\ -\varepsilon - m \end{pmatrix} e^{ikx + i\varepsilon t} \quad (11)$$

である。ここで $N_{\pm}(\varepsilon)$ は適当な規格化因子である。粒子を長さ $2L$ の箱に入れ、 $x = -L$ と $x = L$ で周期境界条件を課すと

$$N_+(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2L}\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon - m)}}, \quad N_-(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2L}\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)}} \quad (12)$$

を得る。あるいは連続状態とエネルギー規格化を用いると

$$N_+(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon - m)}}, \quad N_-(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)}} \quad (13)$$

となる。

1.3 クラインの結果

クラインのステップが存在する場合、ハミルトニアンは

$$H_0 = -\sigma_y p + V(x) + \sigma_z m \quad (14)$$

であり、ここで $V(x)$ は式 (1) で与えられる。ディラック方程式は

$$\left(\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} - (E - V(x)) \sigma_z + m \right) \psi = 0 \quad (15)$$

となる。左から入射する電子を考える。対応する波動関数は、 $x < 0$ では

$$\begin{pmatrix} ik \\ E - m \end{pmatrix} e^{ikx} + B \begin{pmatrix} -ik \\ E - m \end{pmatrix} e^{-ikx} \quad (16)$$

そしてこの状態はホール状態なので (図 2 参照)、 $x > 0$ では

$$F \begin{pmatrix} -ip \\ V - E - m \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (17)$$

である。式 (14)、(15) より、 $x = 0$ での連続性から

$$ik(1 - B) = -ipF \quad (18)$$

$$(E - m)(1 + B) = (V - E - m)F \quad (19)$$

が要求されることが容易にわかる。これより

$$\frac{1 - B}{1 + B} = \frac{-p}{k} \frac{E - m}{V - E - m} = \frac{1}{\kappa} \quad (20)$$

が式 (3) で定義された量 κ を用いて得られる。これから上の式 (2) の $R_S = |B|^2$ の表式が得られ、 T_S の式は $R_S + T_S = 1$ から導出される。

1.4 ザウターの寄与

クラインの驚くべき結果は当時の理論物理学者の間で広く議論された。ボーアは、クラインが見出した大きな透過係数はクラインのステップがあまりにも急峻であるためだと考えた。彼はこれをハイゼンベルクやゾンマーフェルトと議論し、その結果、ミュンヘンのゾンマーフェルトの助手であったザウター [4] が

$$V(x) = vx \quad 0 < x < L \quad (21)$$

($x < 0$ で $V(x) = 0$ 、 $x > L$ で $V(x) = vL$ 、図 3 参照) の形のポテンシャルに対する透過係数を計算した。クラインの問題と同様に負エネルギー状態 (ホール) を障壁を通して伝播させるためには、 $vL > 2m$ が必要である。したがってザウターのポテンシャルは、 v が非常に大きい極限でクラインのステップに帰着するはずである。ザウターのポテンシャルはクラインのものよりももちろん物理的であり、単に有限の空間領域における一定の電場 $E = -v$ を表す。この場合のクライン・トンネリングは、低エネルギーの電子が指数関数的な減衰なしに斥力性の一定電場を通過できることを意味するはずである。ボーアは、電子のコンプトン波長程度の距離でポテンシャル差 $\Delta V > 2m$ が達成されるほどザウターの電場が強い場合にのみクラインの結果が再現されるだろうと予想した。すなわち電場強度 $|E| = |v| > 2m^2$ である。

超幾何関数を用いた長い計算の末に、ザウターは求めていた結果を得た：彼は反射係数・透過係数 R 、 T の表式を得たが、これらは $|v| \sim m^2$ においてはクラインの値 R_S 、 T_S に帰着する。しかしより弱い電場に対しては

$$R \simeq 1 \quad T = e^{-\pi m^2/v} = e^{-(\pi m^2 L/\Delta V)} \quad (22)$$

という結果を得た。これはパラドックスではない結果である。何故なら、これは量子現象に典型的な指数関数的に抑制されたトンネル効果を示すものだからである。当時誰も気づかなかったのは、ザウターが 20 年も先んじてシュウィンガー [6] の量子電磁力学の結果を予見していたということである (次節参照)。また式 (18) は、ボーアの予想が正しいこと、すなわち量子力学におけるトンネル効果が指数関数的に抑制されるという規則を破るには $|E| = |v| \sim \pi m^2$ 程度の電場強度が必要であることを明示的に示していることにも注意されたい。

1.5 フントの寄与

この主題への次の重要な貢献は 10 年後に現れた。フント [5] は、単一粒子のディラック方程式ではなく場の量子論の観点から、再びクラインのステップポテンシャルを検討した。彼はスピノル場ではなく荷電スカラー場に着目した。彼はクラインのステップポテンシャルと一連のステップポテンシャルの両方を考察した。彼の結果はクラインの元々の結果と同様に驚くべきものであった。フントは、 $\Delta V = V(\infty) - V(-\infty) > 2m$ であれば、非ゼロの一定の電流 j が存在し、その電流はエネルギー E に関する透過係数 $T(E)$ の積分で与えられることを見出した。この電流は、真空から自発的に反対符号の電荷を持つ粒子対が生成されたものと解釈しなければならなかった。フントはスピノル場に対しても同じ結果を導こうと試みたが成功せず、これを実現したのは 40 年後のハンセンとラヴンダル [11] であった (スカラー場とスピノル場のクラインステップへの入射の違いについての良い議論はマノグ [12] を参照)。付録において、クラインステップあるいはフントやザウターが考察したようなより一般的なステップポテンシャルに対して、ディラック方程式のもとで実際に電子・陽電子対の自発的な電流が生成されることを、

$$\langle 0|j|0\rangle = -\frac{1}{2\pi} \int T(E) dE \quad (23)$$

という形で示す。これはスカラーに対するフントの結果と一致する。式 (23) は非常に強力である：これは一種の光学定理である。もし自発的な対生成が一定の割合で起こるならば、時間に依存しない反射係数・透過係数はこの過程を取り込んでいなければならない。もしザウターが式 (23) を知っていたなら、式 (22) で計算した透過係数の値を用いるだけで、一定の電場による自発的な対生成についてのシュウィンガー [6] の結果を予言できたであろう。

2 背後にある物理

2.1 方形障壁による散乱

われわれはここで、これらの現象の背後にある物理を調べる。なぜ電子は高いポテンシャル障壁をこれほど容易にトンネルできるのか？ なぜ強いポテンシャル中で粒子が生成されるのか？ これら二つの問いは同じ問いなのか、すなわち、クラインステップあるいは他の強い場によって粒子が生成されるという結果が、クライン・トンネリングの理由なのか？ これらの問いに答えるため、クラインステップではないが類似しており、より明確な性質を持つポテンシャル障壁に注目する。これが方形障壁 (図 4)

$$V(x) = V, |x| < a; \quad V(x) = 0, |x| > a \quad (24)$$

である。左から入射する電子は、広い障壁（すなわち $ma \gg 1$ ）とクラインステップとを区別できないと予想される。結果は実際には同一ではないが、同じ特徴を示す。

方形障壁に対する反射係数・透過係数は [13]

$$R = \frac{(1 - \kappa^2)^2 \sin^2(2pa)}{4\kappa^2 + (1 - \kappa^2)^2 \sin^2(2pa)} \quad (25)$$

$$T = \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 + (1 - \kappa^2)^2 \sin^2(2pa)} \quad (26)$$

で与えられることが容易に示される。トンネル効果はステップよりも障壁の方が起こりやすいことに注意されたい：もし

$$2pa = N\pi \quad (27)$$

（これは $E_N = V - \sqrt{m^2 + N^2\pi^2/4a^2}$ に対応する）であれば、電子は反射されることなく障壁をまっすぐ通過する：これは透過共鳴 [14] と呼ばれる。

固定された m 、 E 、 V に対して a が非常に大きくなると、 pa は非常に大きくなり $\sin(pa)$ は急速に振動する。この場合、 $\sin^2(pa) = \cos^2(pa) = \frac{1}{2}$ を用いて位相角 pa について平均をとることができ、極限

$$R_\infty = \frac{(1 - \kappa^2)^2}{8\kappa^2 + (1 - \kappa^2)^2} \quad (28)$$

$$T_\infty = \frac{8\kappa^2}{8\kappa^2 + (1 - \kappa^2)^2} \quad (29)$$

を得る。 R_∞ と T_∞ が R_S 、 T_S と同じでないことは非物理的に見えるかもしれないが、実際にはそうではない：電磁波理論 [15] においてよく知られているように、（2つの側面を持つ）大きい有限の幅の透明な障壁からの反射は、（1つの側面を持つ）透明なステップからの反射とは異なる。したがって方形障壁はクライン・トンネリングを示すが、これはクラインステップよりも物理的な問題において生じる。ポテンシャルのゼロ点は障壁に対しては適切に定義されるが、ステップに対しては任意であるので、障壁（陽電子を引きつける）あるいは井戸（電子を引きつける）のエネルギースペクトルは容易に計算できる。障壁または井戸からの粒子放出は超臨界性、すなわち系の基底状態エネルギーが連続帯と重なる条件（障壁では $E = m$ 、井戸では $E = -m$ ）によって記述され、こうして粒子生成と時間に依存しない散乱係数 R 、 T との間の関連を調べることができる。

2.2 狭い井戸からのフェルミオン放出

われわれはこの話題の場の理論的取り扱いを以前の論文 [14]（本文中では CDI と呼ぶ）で議論した。ここでその論文の議論を手短に振り返る。自発的なフェルミオン放出は非静的な過程であり、見かけ上静的なポテンシャルの場合であっても、そのポテンシャルがゼロからどのようにスイッチオンされたかを問う必要がある。われわれは CDI に従い、ポテンシャルを断熱的にスイッチオンする。方形井戸

$$V(x) = -V, |x| < a; \quad V(x) = 0, |x| > a \quad (30)$$

を考えるが、まずは非常に狭いポテンシャル $V(x) = -\lambda\delta(x)$ から始めるのが最も容易である。これは $\lambda = 2Va$ として方形井戸の極限である。束縛状態は非常に単純であり、与えられた λ の値に対し

て、偶 (e) あるいは奇 (o) の波動関数 [14] に対応するただ一つの束縛状態が存在し、そのエネルギーは

$$E = m \cos \lambda \quad (\text{e}) \quad (31)$$

$$E = -m \cos \lambda \quad (\text{o}) \quad (32)$$

で与えられる。ポテンシャルが最初にスイッチオンされ λ が小さいとき、束縛状態は偶であり、そのエネルギー E は $E = m$ のすぐ下にある。 λ が増加するにつれて E は減少し、 $\lambda = \pi/2$ で E はゼロに達する。 $\lambda > \pi/2$ では E は負になる。真空状態から出発したと仮定し、従って井戸は初めは空であったと仮定すると、 $\lambda > \pi/2$ に対しては負エネルギー状態が欠けていることになり、これはディラックの空孔理論によれば（束縛された）陽電子の存在として解釈しなければならない。 λ をさらに増加させると E はさらに減少し、 $\lambda = \pi$ で $E = -m$ となる。これが超臨界条件である。したがって $\lambda > \pi$ では、束縛された陽電子は井戸から脱出するのに十分なエネルギーを獲得する。これはゲルシュタインとゼルドヴィッチ [8]、およびピーパーとグライナー [9] によって最初に記述された自発的な陽電子生成の現象である。この描像は、ポテンシャルの強さが十分大きいとき、（電子だけでなく）陽電子もポテンシャル井戸に束縛されることを要求していることに注意されたい：この点についてはクーロンポテンシャルを議論する際に後で立ち返る。

2.3 真空電荷についての余談

電荷を保存しながら真空から陽電子を生成することはどのようにして可能なのか？ この問いは近年、理論家にとって実り多い研究対象となっている。要点は、系の真空状態（および他の状態）の定義が背景ポテンシャルに依存するという点であり、これが真空電荷 [16, 17] という概念につながる。この時点で、ディラック方程式におけるポテンシャルの単一粒子解釈は不十分であり、（付録でクラインステップからの放射を議論する際にも見られるように）場の理論が必要になる。しかし、真空電荷の概念さえ導入すれば、その値を決定するには第一量子化で十分であることがわかる。真空電荷の適切な取り扱いについては読者を CDI に委ねることとし、ここでは必要な式のみを記す。

全電荷は（われわれの規約では電子の電荷は -1 である）

$$Q(t) = \int dx \rho(x, t) = -\frac{1}{2} \int dx [\psi^\dagger(x, t), \psi(x, t)] \quad (33)$$

で定義される。波動関数 $\psi(x, t)$ を生成・消滅演算子で表すと、最終的に

$$Q = Q_p + Q_0 \quad (34)$$

が得られる。ここで粒子電荷 Q_p は、ある状態における電子の数から陽電子の数を引いたものを数える演算子であり、真空電荷 Q_0 は系の正エネルギー状態の数と負エネルギー状態の数の差で定義される単なる数

$$Q_0 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k (\text{states with } E > 0) - \sum_k (\text{states with } E < 0) \right\} \quad (35)$$

である。真空の定義から直ちに

$$\langle 0 | Q | 0 \rangle = Q_0 \quad (36)$$

が得られる。

デルタ関数ポテンシャル $V(x) = -\lambda\delta(x)$ に戻って真空電荷の使用を例示しよう。 λ が $\pi/2$ をわずかに上回るとき、陽電子が一つ生成されたため $Q_p = +1$ であるが、このとき正エネルギー状態の数が一つ減少し負エネルギー状態の数が一つ増加したため、真空電荷は $Q_0 = -1$ である。したがって全電荷 Q は実際には保存されている。ポテンシャルをさらに増加させると、 λ は $E = -m$ となる π に達し、束縛陽電子は連続帯に達して自由になる。超臨界 (supercriticality) においては真空電荷に変化がないことに注意されたい。変化は E がエネルギーのゼロ点を横切るときに起こる。また、超臨界において偶の束縛状態が消失し、最初の奇の状態が現れることにも注意されたい。

λ をさらに増加させて陽電子を数えることができる：与えられた λ に対して生成される陽電子の総数は、 E が $E = 0$ を横切った回数であり、すなわち

$$Q_p = \text{Int} \left[\frac{\lambda}{\pi} + \frac{1}{2} \right] \quad (37)$$

であり、 $Q_0 = -Q_p$ である。ここで $\text{Int}[x]$ は x の整数部分を表す。陽電子放出に対してより興味深い量は、超臨界陽電子の数 Q_S 、すなわち $E = -m$ を横切った状態の数であり、これは

$$Q_S = \text{Int} \left[\frac{\lambda}{\pi} \right] \quad (38)$$

で与えられる。

2.4 広い井戸

われわれが興味を持つ場合、すなわち広い井戸あるいは障壁の場合に話を戻すことができる。強さ $V > 2m$ の一般的な方形井戸ポテンシャルを考え、クラインステップに最も近い広い井戸である $ma \gg 1$ の場合を見てみよう。CDI および CD[3] で行った議論に従う。まず超臨界性の条件を、次に与えられた V に対する束縛陽電子・超臨界陽電子の数を見出さねばならない。

井戸 $V(x) = -V$, $|x| < a$; $V(x) = 0$, $|x| > a$ の束縛状態スペクトルは容易に得られる：偶・奇の解は

$$\tan pa = \sqrt{\frac{(m-E)(E+V+m)}{(m+E)(E+V-m)}} \quad (39)$$

$$\tan pa = -\sqrt{\frac{(m+E)(E+V+m)}{(m-E)(E+V-m)}} \quad (40)$$

で与えられる。ここで井戸内の運動量は $p^2 = (E+V)^2 - m^2$ で与えられる。他の著者たちが電子放出ではなく超臨界陽電子放出を研究してきたことに合わせるため、 V の符号を変更し、陽電子ではなく電子に対して引力的になるようにした。

式 (39) から、 $pa = \pi/2$ のとき基底状態は超臨界となり、したがって $V_1^c = m + \sqrt{m^2 + \pi^2/4a^2}$ である。式 (40) から、最初の奇状態は $pa = \pi$ のとき超臨界となり $V_2^c = m + \sqrt{m^2 + \pi^2/a^2}$ である。明らかに、第 N 番目の陽電子に対応する超臨界ポテンシャルは

$$V_N^c = m + \sqrt{m^2 + N^2\pi^2/4a^2} \quad (41)$$

である。式 (41) より、 $ma \rightarrow \infty$ のとき $V = 2m$ が超臨界状態の集積点であることがわかる。さらにこれは閾値でもある： $V < 2m$ であればポテンシャルは劣臨界である。与えられた $V > 2m$ に対

して、超臨界陽電子の数が

$$Q_S = \text{Int} \left[(2a/\pi) \sqrt{V^2 - 2mV} \right] \quad (42)$$

で与えられることを示すのは難しくない。全陽電子電荷 Q_p の対応する値は、式 (39)、(40) を用いて

$$Q_p - 1 \leq \text{Int} \left[(2a/\pi) \sqrt{V^2 - m^2} \right] \leq Q_p \quad (43)$$

を満たすことが示せる。したがって、 a が大きい場合には次の評価

$$Q_p \sim (2a/\pi) \sqrt{V^2 - m^2}; \quad Q_S \sim (2a/\pi) \sqrt{V^2 - 2mV} \quad (44)$$

が得られる。

これで広い方形井戸 $ma \gg 1$ の全体像を構築することができる。 V が真空状態からゼロからスイッチオンされると、莫大な数の束縛状態が生成される。 V が m を横切ると、これらの状態のうち非常に多くの数 Q_p が $E = 0$ を横切り束縛陽電子となる。 V が $2m$ を横切ると、多数の束縛状態 Q_S がまとめて超臨界となる。これにより、井戸から流れ出す正の電荷を持つ電流が生じる。しかしこの場合、クラインステップの場合とは異なり、井戸内の電荷は有限であるため粒子放出過程は有限の寿命を持つ。しかしそれでも、 ma が十分大きければ、広い障壁に対する過渡的な陽電子電流は、次節で見るように、かなりの時間にわたって近似的に一定である。

2.5 放出のダイナミクス

ここで $V = 2m + \Delta$ 、 $\Delta \ll m$ の場合に限定する。これは必須ではないが、ポテンシャルが臨界値を超えてまだ増加している間の陽電子放出のダイナミクスを計算する必要をなくす。すべての陽電子は、ポテンシャルが $V = 2m$ を通過するときにほぼ瞬間的に生成されると仮定できる。これはまた、運動学が非相対論的であることも意味する。したがって、 Δa が大きくなるほど十分広い井戸に対しては、 $Q_S \sim (2a/\pi) \sqrt{2m\Delta}$ である。第 N 番目の超臨界陽電子の井戸内運動量は依然として式 (27) の $p_N a = N\pi/2$ で与えられ、これは放出される陽電子のエネルギー $|E_N| = 2m + \Delta - \sqrt{p_N^2 + m^2} > m$ に対応する。放出されるエネルギーは離散的な値を持つが、 a が大きい場合には密に間隔を持つことに注意されたい。

超臨界井戸の寿命 τ は、最も遅い陽電子が井戸から脱出するまでの時間で与えられる。最も遅い陽電子は最も深いところにある状態、すなわち $N = 1$ 、運動量 $p_1 = \pi/2a$ のものである。したがって $\tau \approx ma/p_1 = 2ma^2/\pi$ である。したがって寿命は有限であるが a^2 に比例して増大する。しかし多くの陽電子は τ よりずっと前に脱出してしまう。最初に Q_S 個の超臨界陽電子が存在し、それらの平均運動量 $\bar{p}$ は $N = Q_S/2$ に対応する。したがって $\bar{p} = \sqrt{m\Delta/2}$ であり、これは a に依存しない。したがって、オーダーが $\tau = a\sqrt{2m/\Delta}$ の長い時間にわたって実質的に一定な陽電子の過渡電流が生成される。したがって、 a が十分大きい場合の方形井戸（あるいは障壁）は、クラインステップとまさに同様に振る舞うことがわかる：見かけ上一定の電流を、見かけ上連続的なエネルギースペクトルとともに放出するのである。しかし、電流は最初はゼロから立ち上がり、最終的にはゼロに戻らなければならない。したがって井戸・障壁は、超臨界陽電子あるいは電子の放出に対して有限だが長い寿命を持つ時間依存の物理的な実体である。

時間に依存しない散乱問題の透過共鳴が、井戸あるいは障壁から放出される粒子のエネルギーと一致することに再び注意されたい。したがって、パウリの原理を使ってこの関連を説明したくなる。ハ

ンセンとラヴンダル [11] に従えば、共鳴エネルギーにおいて R はゼロでなければならないと言えるかもしれない、なぜならその電子状態はそのエネルギーで放出された電子によってすでに満たされているからである。しかし、反射係数はそのエネルギーのボソンに対してもフェルミオンと同様にゼロになることが容易に示せ、この場合パウリの原理は成り立たない。さらに、放出は時間 τ の後に終わるのに対し、 $R = 0$ は $t > \tau$ の時間においても成り立つ。したがって、クライン・トンネリングはいかなる放出過程からも独立した、それ自体で一つの物理現象であると結論せざるを得ない。クライン・トンネリングは粒子放出過程とは実際に異なるようである：これが実際そうであることを示すために方形障壁に戻り、障壁が臨界未満 (subcritical) であってもクライン・トンネリングが起こることを示す。

2.6 クライン・トンネリングとクーロン障壁

式 (25) から、方形障壁に対する反射係数 R がゼロになりえない一方で、 $V > 2m$ のとき、散乱が古典的に禁止されているエネルギー $E < V$ に対しても透過係数 T は指数関数的に小さくはないことは明らかである。これを理解する最も単純な方法は、障壁の下にある負エネルギー状態を、陽電子がエネルギーを運ぶのとまったく同じ方法でエネルギーを運ぶことができる物理的粒子に相当する状態として考えることである。式 (2) から、 R_S と T_S は屈折率の異なる透明な媒質における反射・透過係数に対応することがわかる：すなわち k は、ポテンシャルの存在下と非存在下での粒子の伝播速度の違いに対応する、実効的なフェルミオンの屈折率にほかならない。この見方に基づけば、方形障壁からの散乱に対して透過共鳴を得るために運動量 p を調整することは、与えられたスラブ (厚板, 平板) 状の屈折物質が透明になる周波数を見出すことにほかならない。これは新しい考えではない。イェンセンの言葉を借りれば、「十分な高さを持つポテンシャルの丘は電子に対するファブリ・ペロー・エタロン (Fabry-Perot 干渉計と類似の機器) として働き、ある波長に対しては完全に透明であり、他の波長に対しては部分的あるいは完全に反射性を示す」[18]。

これでクライン・トンネリングについて、われわれのモデルである方形井戸・障壁問題と、それに類似したクーロン問題の両方について、より詳しく調べることができる。興味深い領域は、ポテンシャルが強いが臨界未満であり、放出のダイナミクスが関与せず、感じ取れる時間 (sensible time) に依存しない散乱パラメータが定義できる領域である。方形障壁 $V(x) = V$ からの電子散乱に対しては、陽電子が障壁の下を伝播できるように $V > 2m$ であることに加えて、 $V < V_1^c = m + \sqrt{m^2 + \pi^2/4a^2}$ であることが要求される。対応する方形井戸 $V(x) = -V$ に対しては、 $V > \sqrt{m^2 + \pi^2/4a^2}$ であれば負エネルギー束縛状態 $0 > E > -m$ が存在する (式 (50) 参照)。したがってポテンシャル井戸が十分深ければ、実際に陽電子を束縛する。対応して、高い障壁は電子を束縛する。したがって、強い劣臨界ポテンシャルに対して電子が障壁をトンネルできることは、それらがそのポテンシャル障壁に引きつけられているのだから驚くべきことではない。この現象を理解する別の方法は、実効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(x)$ の概念を用いることである。これはシュレディンガー方程式において相対論的波動方程式の性質を模擬するために使うことのできるポテンシャルである。相対論的波動方程式 (クライン・ゴルドンあるいはディラック) に 4 元ベクトルの時間成分として導入されたポテンシャル $V(x)$ に対しては、 $2mV_{\text{eff}}(x) = 2EV(x) - V^2(x)$ であることが容易にわかる。したがって、エネルギー E の符号が変わると実効ポテンシャルは斥力から引力へと変化する。

純粋なクーロンポテンシャルに対しては、斥力ポテンシャルの場合の波動関数が引力ポテンシ

ルの場合に比べて指数関数的に抑制されることがよく知られている。例えば、 $\rho = |\psi(0)|_{\text{pos}}^2 / |\psi(0)|_{\text{el}}^2$ を、原点に到達する陽電子がクーロン障壁を透過する確率と、同じエネルギーの電子の同確率との比とすると、粒子が非相対論的である場合には

$$\rho = e^{-2\pi Z\alpha E/p} \quad (45)$$

であり、ここで p 、 E は粒子の運動量とエネルギーであり、これは $p \rightarrow 0$ のとき指数関数的に小さい [19]。しかし粒子が相対論的 [20] であれば

$$\rho = f e^{-2\pi Z\alpha} \quad (46)$$

であり、ここで f は複素ガンマ関数の比であり、 Z が大きい場合には近似的に 1 である。したがって $Z\alpha \sim 1$ に対して $\rho \sim e^{-2\pi Z\alpha} \approx 10^{-3}$ であり、これは Z とともに指数関数的に減少するとはいえず、特に小さいわけではない。

クーロンポテンシャルに対してクライン・トンネリングを実証するには、まず原子核サイズの効果を含めて $r = 0$ においてポテンシャルが特異でないようにすること、そして束縛陽電子状態が存在するように Z が十分大きいことが必要である。これは、 Z がその超臨界値 Z_c (およそ 170) より下でありながら、1s 状態が $E < 0$ を持つのに十分大きくなければならないことを意味する。特定の核電荷分布モデルに依存する文献 [8, 9] の計算によれば、この領域は $150 < Z < Z_c$ であり、残念ながら実験的に実証するのは困難である。それでも理論は明確であるように思われる：この劣臨界領域において、陽電子はもはや式 (46) のような Z とともに指数関数的に減少するトンネル関係に従うべきではない。その代わり、少なくとも低エネルギーに対しては、 Z の増加とともにクーロン障壁はより透明になるはずである。方形障壁との類推から、クーロンポテンシャルへの陽電子散乱に対する最大透過は $Z = Z_c$ 付近で起こると予想されるが、超臨界性の発現は時間に依存しない散乱量がもはや適切に定義されなくなる可能性を意味する。われわれは現在、 Z_c 付近の Z を持つ原子核への陽電子散乱について、クライン・トンネリングをシミュレートできるかどうか状況を明らかにするため、さらに詳細な計算を行っている。

3 結論

クラインが検討したポテンシャルステップが病的なものであり、それゆえ背後にある物理に対する誤解を招くガイドであったことは、彼にとって非常に不運であったように思われる。クラインのステップは、時間に依存する放出過程が時間に依存しなくなる極限を表しており、したがって付録で示すように放出電流と透過係数の間に関係が存在する。一般には、放出される過渡電流と時間に依存しない透過係数との間に直接の関係は存在しない。クラインの結果の基礎にあるディラック方程式の物理は豊かである：それは、強いポテンシャルによる自発的なフェルミオン生成と、相対論的波動方程式に特有の負エネルギー状態による、半導体におけるバンド間トンネリング [21] に類似した、クライン・トンネリングという別個の現象の両方を含んでいる。超臨界性による自発的な陽電子生成は、重イオン衝突の実験においていまだ明確には実証されていないが、超流動 $^3\text{He-B}$ における実験 [22, 23] では、流体中を運動する物体の速度が臨界ランダウ速度 v_L を超えるときに異常な効果が観測されている。これらの実験は今では超臨界陽電子生成と同じように解釈されている [24]。フェルミオン多体系が、クラインが 70 年前に発見した基礎的な量子過程を実証するために使えるということも十分にありうる。

われわれは、助言と協力に対して A. Anselm、G. Barton、J. D. Bjorken、B. Garraway、R. Hall、L. B. Okun、R. Laughlin、G. E. Volovik、D. Waxman の各氏に感謝したい。

付録 A ステップポテンシャルによる対生成

$V > 2m$ に対する式 (1) のクラインステップを考える。ステップの存在下での真空状態における電流の期待値がゼロでないことを示す。これはクラインステップが一定の割合で真空から電子・陽電子対を生成することを意味する。この導出は真空状態の注意深い定義に基づいている。われわれは CD2[3] の導出を用いる。

A.1 クラインステップの存在下での基準モード

エネルギー規格化された正エネルギー（粒子）解は、式 (13) から

$$\sqrt{\frac{\varepsilon + m}{2k}} \left(\frac{i}{k} \right) \frac{1}{E + m} e^{ikx} \quad (47)$$

と書ける。負エネルギー（ホール）解は

$$\sqrt{\frac{\varepsilon - m}{2k}} \left(\frac{i}{k} \right) \frac{1}{E + m} e^{ikx} \quad (48)$$

である。散乱は通常、（左からの）入射波、（右からの）反射波、（右への）透過波からなる解によって記述される。ここでは別の形の波を用いる方が便利である。すなわち、左から入射し反射波を持たない波（添字 L ）、そして右から入射し反射波を持たない波（添字 R ）を用いる。粒子波動関数とホール波動関数はそれぞれ u 、 v と表記する。われわれが求めている非自明な結果が、左側の粒子連続帯 $E > m$ と右側のホール連続帯 $E < V - m$ の重なりから生じることは明らかである。したがってわれわれはエネルギー範囲 $m < E < V - m$ の波動関数に関心を持つ。この範囲における u_L 、 u_R の表式は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} u_L(E, x) = & \frac{\sqrt{2\kappa}}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{E + m}{k}} \left(\frac{i}{k} \right) \frac{1}{E + m} e^{ikx} \theta(-x) + \\ & \left\{ \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{V - E - m}{2|p|}} \left(\frac{i}{|p|} \right) \frac{1}{E + m - V} e^{i|p|x} + \sqrt{\frac{V - E - m}{2|p|}} \left(\frac{i}{-|p|} \right) \frac{1}{E + m - V} e^{-i|p|x} \right\} \theta(x) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} u_R(E, x) = & \left\{ \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \sqrt{\frac{E + m}{2k}} \left(\frac{i}{k} \right) \frac{1}{E + m} e^{ikx} + \sqrt{\frac{E + m}{2k}} \left(\frac{i}{-k} \right) \frac{1}{E + m} e^{-ikx} \right\} \theta(-x) + \\ & + \frac{\sqrt{2\kappa}}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{V - E - m}{|p|}} \left(\frac{i}{|p|} \right) \frac{1}{E + m - V} e^{i|p|x} \theta(x) \end{aligned} \quad (50)$$

これらの式では、 $x > 0$ に対しては群速度が負であるため（式 (17) 参照）、 p ではなく $|p|$ を用いている。

式 (49)、(50) の解に対応する電流を評価する必要がある。われわれの規約では $\alpha_x = \gamma_0 \gamma_x = -\sigma_y$ であるから

$$j_L \equiv -u_L^\dagger(E, x) \sigma_y u_L(E, x) = -\frac{2\kappa/\pi}{(\kappa + 1)^2} \quad (51)$$

$$j_R \equiv -u_R^\dagger(E, x) \sigma_y u_R(E, x) = -\frac{2\kappa/\pi}{(\kappa + 1)^2} \quad (52)$$

A.2 真空の定義と電流の真空期待値

ここで波動関数 ψ を、左向き・右向きの解を参照する生成・消滅演算子で展開する：

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \int dE \{ & a_L(E) u_L(E, x) e^{-iEt} + a_R(E) u_R(E, x) e^{-iEt} + \\ & + b_L^\dagger(E) v_L(E, x) e^{iEt} + b_R^\dagger(E) v_R(E, x) e^{iEt} \} \end{aligned} \quad (53)$$

$\psi^\dagger$ はエルミート共役の展開で与えられる。ステップの存在下での適切な真空状態をここで決定しなければならない。波動関数 $u_L(E, x)$ と $v_L(E, x)$ によって記述される状態は、それぞれ左から来る（正エネルギーの）電子と陽電子に対応する。したがって、ステップの左側にいる観測者に対しては、そのような状態は真空状態には存在しないはずであり、

$$a_L(E)|0\rangle = 0, \quad b_L(E)|0\rangle = 0 \quad (54)$$

である。波動関数 $u_R(E, x)$ は $E > m + V$ に対しては、右にいる観測者にとって右から入射する電子を記述する。これらは真空状態には存在しないので

$$a_R(E)|0\rangle = 0 \quad \text{for } E > m + V \quad (55)$$

である。波動関数 $v_R(E, x)$ は、やはり右にいる観測者に対して、右から入射する陽電子を記述する。再び

$$b_R(E)|0\rangle = 0 \quad (56)$$

である。クラインの問題において決定的な役割を果たす波動関数は、 $m < E < V - m$ における $u_R(E, x)$ の集合に属する。右にいる観測者にとって、これらの状態は正エネルギーの陽電子であり、したがって真空状態において満たされているはずである、すなわち

$$a_R^\dagger(E) a_R(E')|0\rangle = \delta(E - E')|0\rangle, \quad m < E < V - m \quad (57)$$

である。真空を指定できたので、次にして最後のステップは電流の真空期待値の計算である：

$$\langle 0|j|0\rangle = \frac{1}{2} (-\langle 0|\psi^\dagger \sigma_y \psi|0\rangle + \langle 0|\psi \sigma_y \psi^\dagger|0\rangle) \quad (58)$$

式 (53) を式 (58) に代入し、 v_L と v_R を含むすべての項が、対応するエネルギーが興味ある範囲 $m < E < V - m$ の外にあるため落とせることに注意すると、

$$\begin{aligned} \langle 0|j|0\rangle = & -\frac{1}{2} \int dE dE' \{ \langle 0|a_L^\dagger(E) a_L(E')|0\rangle u_L^\dagger(E, x) \sigma_y u_L(E', x) + \\ & + \langle 0|a_L(E) a_L^\dagger(E')|0\rangle u_L^\dagger(E', x) \sigma_y u_L(E, x) - \langle 0|a_R^\dagger(E) a_R(E')|0\rangle u_R^\dagger(E, x) \sigma_y u_R(E', x) + \\ & + \langle 0|a_R(E) a_R^\dagger(E')|0\rangle u_R^\dagger(E', x) \sigma_y u_R(E, x) \} \end{aligned} \quad (59)$$

に至る。式 (59) の第 1 項は式 (54) によりゼロになる。第 2 項は、反交換関係と式 (54) を用いると $u_L^\dagger(E', x)\sigma_y u_L(E, x)\delta(E - E')$ となる。第 3 項は、式 (57) を用いて $-u_R^\dagger(E, x)\sigma_y u_R(E, x)\delta(E - E')$ を与え、第 4 項は反交換関係（すなわち排他律。状態 $|0\rangle$ はすでに状態 u_R に電子を含んでいるので、 $a_R^\dagger$ を作用させるとゼロになる）を用いてゼロになる。デルタ関数を用いてエネルギー積分を一つただちに実行できる。こうして

$$\langle 0|j|0\rangle = \frac{1}{2} \int dE (-j_L + j_R) = -\frac{1}{2\pi} \int dE \frac{4\kappa(E)}{(\kappa(E) + 1)^2} = -\frac{1}{2\pi} \int dE T_S(E) \quad (60)$$

を得る。ここでエネルギー積分はクラインの範囲 $m < E < V - m$ にわたる。

式 (60) を、 $V(x < 0) = V_1$ 、 $V(x > L) = V_2$ 、 $V_2 - V_1 > 2m$ であるような、ザウターやフントが考察したものを含む任意のステップポテンシャルに一般化するのは、いまや容易であり、対生成電流と透過係数を結びつける式 (23) を得ることができる。

参考文献

- [1] O. Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929)
- [2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **117**, 612 (1928)
- [3] A. Calogeracos and N. Dombey, Int. J. Mod. Phys. A (1999). この論文は本文中で CD と呼ばれる。
- [4] F. Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931)
- [5] F. Hund, Z. Phys. **117**, 1 (1941)
- [6] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)
- [7] S. Hawking, Nature **284**, 30 (1974)
- [8] Ya. B. Zeldovich and S. S. Gershtein, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 654 (1969); Ya. B. Zeldovich and V. S. Popov, Uspekhi Fiz. Nauk **105**, 403 (1971)
- [9] W. Pieper and W. Greiner, Z. Phys. **218**, 327 (1969)
- [10] S. A. Bruce, Am. J. Phys. **54**, 446 (1986)
- [11] A. Hansen and F. Ravndal, Physica Scripta **23**, 1033 (1981)
- [12] C. A. Manogue, Ann. Phys. (N.Y.) **181**, 261 (1988)
- [13] H. G. Dosch, J. H. D. Jensen and V. F. Muller, Phys. Norvegica **5**, 151 (1971)
- [14] A. Calogeracos, N. Dombey and K. Imagawa, Yadernaya Fizika **159**, 1331 (1996) (Phys. At. Nucl. **159**, 1275 (1996)). この論文は本文中で CDI と呼ばれる。
- [15] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941, p. 512. 参照：D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, Oxford 1964
- [16] M. Stone, Phys. Rev. **B31**, 6112 (1985)
- [17] R. Blankenbecler and D. Boyanovsky, Phys. Rev. **D31**, 2089 (1985)
- [18] F. Bakke and H. Wergeland による引用, Phys. Scripta **25**, 911 (1982)
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (3rd Edition), Pergamon, Oxford 1977, p. 182
- [20] M. E. Rose, *Relativistic Electron Theory*, Wiley, New York, p. 191, 1961

- [21] E. O. Kane and E. I. Blount, Interband Tunneling, in E. Burstein and S. Lundqvist Eds., *Tunneling Phenomena in Solids*, Plenum (New York) 1969, p. 79
- [22] C. A. M. Castelijns, K. F. Coates, A. M. Guenault, S. G. Mussett and G. R. Pickett, Phys. Rev. Lett. **56**, 69 (1986)
- [23] J. P. Carney, A. M. Guenault, G. R. Pickett and G. F. Spencer, Phys. Rev. Lett. **62**, 3042 (1989)
- [24] A. Calogeracos and G. E. Volovik, ZhETF **115**, 1 (1999)

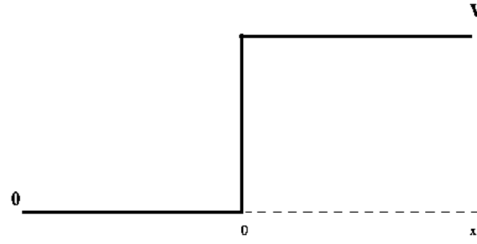


図1 クラインステップのポテンシャル $V(x)$ 。

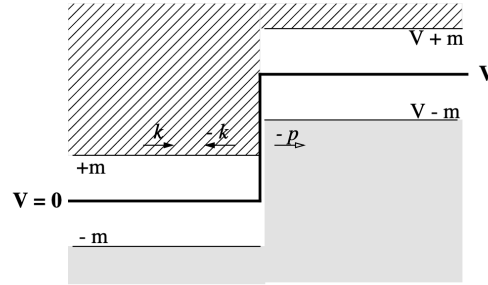


図2 高さ $V > 2m$ のクラインステップによって散乱されるエネルギー E の電子。電子は実線の矢じりで示され、ホール状態は白抜きの矢じりで示されている。粒子連続帯（斜線背景）とホール連続帯（陰影背景）は $m < E < V - m$ で重なる。

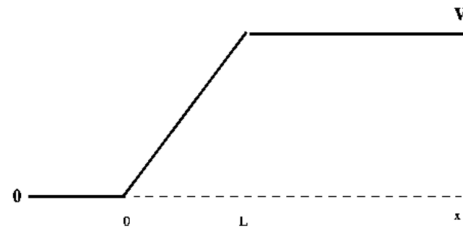


図3 領域 $0 < x < L$ における一定電場を表すザウター型のポテンシャル $V(x)$ 。

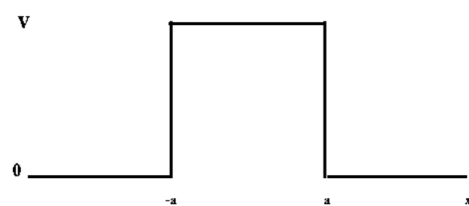


図 4 領域 $-a < x < a$ における高さ V の方形障壁を表すポテンシャル $V(x)$ 。