

13 Klein's Paradox

以下では、エネルギー E 、運動量 $p = p_z$ を持つ電子が、無限に広がる階段ポテンシャル（図.1）に散乱される問題を考察する。まずこの問題をディラック方程式の粒子解釈の観点から考察し、次に例 13.1 において同じ問題を空孔理論の枠組みで取り上げ、一見パラドックスに見える状況をより深く理解する*1。

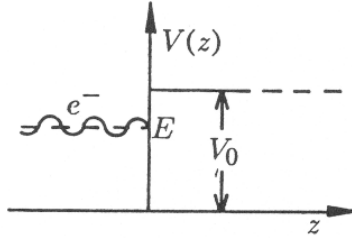


図 1 電子の波が z 軸に沿って伝搬し、強度が V_0 の階段ポテンシャルに衝突する。

自由電子に対しては $(E/c)^2 = p^2 + m_0^2 c^2$ が成り立つが、一定ポテンシャルが存在する場合には、

$$\left(\frac{E - V_0}{c} \right)^2 = p'^2 + m_0^2 c^2 \quad (13.1)$$

が成立する。ここで p' はポテンシャル内での電子の運動量を表す。ディラック方程式*2 とその随伴方程式はそれぞれ

$$\left\{ \frac{E - eV}{c} - \hat{\beta} m_0 c \right\} \psi + i\hbar \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 \quad (13.2a)$$

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{E - eV}{c} - \hat{\beta} m_0 c \right\} + i\hbar \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k = 0 \quad (13.2b)$$

と書ける。ここで

$$eV = V_0 \quad (z > 0), \quad eV = 0 \quad (z < 0)$$

*1 O.Klein: Z.Phys. **53**, 157 (1929).

*2 [訳註] 自由粒子ディラック方程式、及び、ポテンシャル V_0 が存在する場合のディラック方程式は次であった：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = E\psi = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2) \psi, \quad (E - V_0)\psi = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2) \psi, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

と仮定し、入射波を

$$\psi_i = u_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (pz - Et) \right\} \quad (13.3)$$

とおく。(13.3) を (13.2a) に代入し、 $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_3$ を用い (入射波は $z < 0$ 領域として $eV = 0$ とすると),

$$\left\{ \frac{E}{c} - \hat{\alpha}p - \hat{\beta}m_0c \right\} u_i = 0 \quad (13.4)$$

$u_i \neq 0$ を要求すると、 $\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0$ より

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 \quad (13.5)$$

が得られる。また入射電子を対象とするため $E > 0$ を選ぶ。反射波の運動量は $-p$ 、透過波の運動量 p' は (13.1) で与えられる。小さい V_0 に対しては p' は正であるから、まず次のようにおく：

$$\psi_r = u_r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (-pz - Et) \right\}, \quad \psi_t = u_t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p'z - Et) \right\} \quad (13.6)$$

したがって (13.2a) より、

$$\left\{ \frac{E}{c} + \hat{\alpha}p - \hat{\beta}m_0c \right\} u_r = 0 \quad \text{および} \quad \left\{ \frac{E - V_0}{c} - \hat{\alpha}p' - \hat{\beta}m_0c \right\} u_t = 0 \quad (13.7)$$

境界面では全波動関数が連続でなければならない。すなわち $z = 0$ の場合に

$$u_i + u_r = u_t \quad (13.8)$$

は確かであるべきだ。(13.4) より $(E/c - \beta m_0 c) u_i = \hat{\alpha} p u_i$ また (13.7) より $(E/c - \beta m_0 c) u_r = -\hat{\alpha} p u_r$ なので、辺々どうしを足し合わせると

$$\left(\frac{E}{c} - \hat{\beta}m_0c \right) (u_i + u_r) = \hat{\alpha}p(u_i - u_r) \quad (13.9)$$

(13.7) の u_t に (13.8) を代入すると、

$$\left(\frac{E}{c} - \hat{\beta}m_0c \right) (u_i + u_r) = \left(\frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}p' \right) (u_i + u_r) \quad (13.10)$$

これより式 (13.9) と式 (13.10) の右辺は等しいことになるから、

$$\left(\frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}p' \right) (u_i + u_r) = \hat{\alpha}p(u_i - u_r) \quad (13.11)$$

すなわち

$$\left\{ \frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}(p + p') \right\} u_r = - \left\{ \frac{V_0}{c} - \hat{\alpha}(p - p') \right\} u_i \quad (13.12)$$

両辺に $V_0/c - \hat{\alpha}(p + p')$ を掛け、 $\hat{\alpha}^2 = 1$ 、(13.1) および (13.5) を用いると、

$$u_r = \frac{(2V_0/c)(-E/c + \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p + p')^2} u_i \equiv r u_i \quad (13.13)$$

同様に随伴振幅について

$$u_r^\dagger = r u_i^\dagger \quad (13.14)$$

すなわち

$$u_r^\dagger u_r = \left(\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + p')^2} \right)^2 u_i^\dagger \left(-\frac{E}{c} + \hat{\alpha}p \right)^2 u_i \quad (13.15)$$

が得られる。恒等式

$$c u_i^\dagger \hat{\alpha} u_i = \frac{pc^2}{E} u_i^\dagger u_i \quad (13.16)$$

(これは $u_i^\dagger$ と u_i の運動方程式から容易に導かれる) を (13.15) に用いると^{*3}

$$\begin{aligned} u_r^\dagger u_r &= \left(\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + p')^2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{E^2}{c^2} + p^2 \right) u_i^\dagger u_i - \frac{2Ep}{c} u_i^\dagger \hat{\alpha} u_i \right\} \\ &= \left(\frac{2V_0 m_0}{V_0^2/c^2 - (p + p')^2} \right)^2 u_i^\dagger u_i \equiv R u_i^\dagger u_i \end{aligned} \quad (13.17)$$

が導かれる。 R は反射される電子の割合 (反射係数) である。 $V_0 = 0$ のとき $R = 0$ 、また $V_0 = E - m_0 c^2$ すなわち (13.1) より $p' = 0$ のときは $R = 1$ となり、全電子が反射される。 V_0 がさらに増加して $V_0 > E - m_0 c^2$ になると、 p' は虚数になる。そこで $p' = i\hbar\mu$ とおくと $(i/\hbar)p'z = -\mu z$ となるので、

$$\psi_t = u_t \exp \left\{ -\mu z - i \frac{E}{\hbar} t \right\} \quad (13.18)$$

^{*3} [訳註] 相対論的力学の公式から次が言える (ただし $\beta = v/c$ である) :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = E \frac{\mathbf{v}}{c^2} \quad \text{or} \quad \mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} \quad (1)$$

また、ハミルトニアン $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$ の時に位置変数 x_k に対する運動方程式は、

$$v_k = \dot{x}_k = \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = \frac{i}{\hbar} [c\alpha_j p_j + \beta mc^2, x_k] = \frac{ic\alpha_j}{\hbar} [p_j, x_k] = \frac{ic\alpha_j}{\hbar} \times (-i\hbar\delta_{jk}) = c\alpha_k \quad (2)$$

以上の2式から

$$\dot{x}_k = c\alpha_k = \frac{c^2 p_k}{E}, \quad \rightarrow \quad \langle \alpha_k \rangle = \left\langle \frac{cp_k}{E} \right\rangle$$

また、次が言える :

$$\left(-\frac{E}{c} + \hat{\alpha}p \right)^2 = \frac{E^2}{c^2} - 2\frac{E}{c}\hat{\alpha}p + \hat{\alpha}^2 p^2 = \frac{E^2}{c^2} - 2\frac{E}{c}\frac{cp}{E}p + p^2 = \frac{E^2}{c^2} - 2p^2 + p^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

とおく。ここで μ は実数である。 $z \rightarrow \infty$ で右辺バリア内の密度が発散しないよう $\mu > 0$ でなければならない。その一方で、(13.13) は $p' = i\hbar\mu$ であるから、

$$u_r = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p + i\hbar\mu)^2} u_i, \quad u_r^\dagger = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p - i\hbar\mu)^2} u_i^\dagger \quad (13.19)$$

となり、

$$u_r^\dagger u_r = \frac{(2V_0/c)^2 (E^2/c^2 - p^2)}{[(V_0/c + p)^2 + \mu^2 \hbar^2] [(V_0/c - p)^2 + \mu^2 \hbar^2]} u_i^\dagger u_i \quad (13.20)$$

(13.1) と (13.5) より

$$p'^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2} = -\hbar^2 \mu^2 < 0 \quad (13.21)$$

であり、 $p'^2 = -\mu^2 \hbar^2$ であるから

$$\left(\frac{V_0}{c} \pm p\right)^2 + \mu^2 \hbar^2 = \frac{2V_0}{c} \left(\frac{E}{c} \pm p\right) \quad (13.22)$$

したがって $u_r^\dagger u_r = u_i^\dagger u_i$ となる。

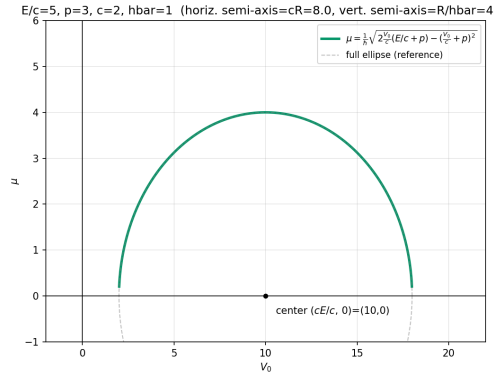


図2 [訳註] このグラフは Claude により作成された。

これは反射カレント (reflected current) が入射カレントに等しいことを意味する。バリアの裏側では波は指数関数的に減衰する。(13.21) よりこの状況の条件は $p < V_0(2E - V_0)/c^2$ であり、 V_0 の増加に伴い V_0 が値 $E - c(E^2/c^2 - p^2)^{1/2} = E - m_0 c^2$ を超えた時点でこの条件が満たされる。さらに V_0 が増加すると (13.22) より μ はまず増加し、 $E = V_0$ で最大値に達した後、再び減少して $V_0 = E + m_0 c^2$ でゼロになる^{*4}。

^{*4} [訳註] 式 (13.22) を式変形すると、

$$\left(\frac{V_0}{c} - \frac{E}{c}\right)^2 + (\hbar\mu)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \equiv R^2, \quad \rightarrow \quad \frac{(V_0 - E)^2}{(cR)^2} + \frac{\mu^2}{(R/\hbar)^2} = 1$$

となるので、 V_0 に対する μ の変化の様子をグラフ化すると図2のようになる。即ち、中心 $(E, 0)$ で水平半径 $cR = m_0 c^2$ 、垂直半径 $R/\hbar = m_0 c/\hbar$ の楕円となる。従って、 μ が正となる V_0 の範囲は $E - cR = E - m_0 c^2$ から $E + cR = E + m_0 c^2$ までとなる。

それ以上の $V_0 > E + m_0 c^2$ では p' は再び実数値をとり、(13.13) および (13.17) が再び解となる。ただしこの領域では運動エネルギー $E - V_0$ が負となり、古典的に禁止された状況となる。(13.16) および (13.1) より群速度は

$$v_{\text{gr}} = \frac{c^2}{E - V_0} p' \quad (13.23)$$

と与えられ、 $p' > 0$ を選んだ場合、この領域では群速度は運動量 p' と逆方向を向く。群速度は波束の速度を表すから、透過波束が $z = +\infty$ から入射してくるように見えるが、これは $z = -\infty$ からのみ入射波束を許すという境界条件に矛盾する*⁵。従って $p' < 0$ (すなわち (13.1) の平方根の負号) を選ばなければならない。ただしこの条件はディラック方程式自体には含まれておらず、物理的境界条件によって強制されるものである*⁶。Bjorken と Drell の議論*⁷ ではこの点が考慮されておらず、反射係数は

$$R = \frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2} \quad (13.24)$$

$$r = \frac{p'}{p} \cdot \frac{E + m_0 c^2}{E - V_0 + m_0 c^2} \quad (13.25)$$

と書かれている。 $V_0 > E + m_0 c^2$ においてこの式は負となりうるが、境界条件から $p' < 0$ を選ばなければならないため、 r は常に正のままである。したがって反射係数は常に $R \leq 1$ であり、Bjorken と Drell が示した $R > 1$ とはならない。

以上から、 $V_0 > E + m_0 c^2$ の場合、一部の電子が正の運動エネルギーを負の値に変えることでポテンシャルバリアを透過できることが示された。トンネルする電子の群速度は (13.1) より

$$\frac{c^2}{V_0 - E} |p'| = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{V_0 - E} \right)^2} \quad (13.26)$$

と与えられ、これは $V_0 = E + m_0 c^2$ でちょうどゼロとなり、 $V_0 \rightarrow \infty$ では光速に近づく。 $V_0 = E + m_0 c^2$ では (13.17) より反射係数はちょうど $R = 1$ (全反射) となり、 V_0 の増加とともに減少して $V_0 \rightarrow \infty$ の極限で最小値

$$\alpha = R_{\text{min}} = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} R(V_0) = \frac{E/c - p}{E/c + p} \quad (13.27)$$

に達する。境界面を透過する電子の割合は

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} \quad (13.28)$$

*⁵ [訳註] 波束は $Z = -\infty$ からの入射だけとすれば、ポテンシャル領域 ($z > 0$) に於いては、それを透過した波 (透過波) のみが存在するはずである。その波束の運動量 p' は明らかに正となる。

*⁶ H.G. Dosch, J.H.D. Jensen, V.L. Mueller: Phys. Norv. **5**, 151 (1971)

*⁷ J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Mechanics*, ed. by L. Schiff, International Series in Pure and Applied Physics (MacGraw-Hill, New York 1964)

であり、 β は透過係数と呼ばれ $\alpha + \beta = 1$ が成立する。 $p = m_0c$ (光速の 80% の速度を持つ電子) の場合、(13.5) より $\beta \approx 2/(\sqrt{2} + 1) \approx 0.83$ 、すなわち入射電子の 83% がポテンシャルバリアを透過する。この大きな透過係数は $V_0 \rightarrow \infty$ ではなく数 m_0c^2 程度の値でも同様に現れる。F. Sauter ^{*8} による滑らかなポテンシャル端を用いた計算によれば、この古典的には全く理解できない大きな透過係数は、 $V = 0$ から $V = V_0$ への上昇幅がコンプトン波長程度、すなわち

$$d \leq \frac{\hbar}{m_0c} \quad (13.29)$$

のオーダーでない限り現れないことが示されている。この透過係数の予想外の大きさは**クラインのパラドックス**として知られており、ここで与えられた解釈は完全に一粒子描像によるものである。この描像においては対生成を考慮する必要は全くないが (Bjorken と Drell はこのレベルですすでに対生成を取り上げているが)、次の例 13.1 で空孔理論との関連を見ると、境界条件「 $z = +\infty$ からの入射波なし」が変わることが分かる。すなわち「 $p' < 0$ を要求しなくてよい」ことになる。

例 13.1 クラインのパラドックスと空孔理論

空孔理論は、 $V_0 > m_0c^2 + E$ のポテンシャルバリアに粒子波が衝突する場合の振る舞いを記述する際に重要となる。

z 方向に運動するスピン上向きの平面波に対するディラック方程式は：

(a) 領域 I (図 13.1 の $z < 0$ 領域)

$$(c\hat{\alpha}_3\hat{p}_z + \hat{\beta}m_0c^2)\psi = E\psi \quad (1)$$

(b) 領域 II (図 13.1 の $z > 0$ 領域)

$$(c\hat{\alpha}_3\hat{p}_z + \hat{\beta}m_0c^2)\psi = (E - V_0)\psi \quad (2)$$

解は

$$\psi_I = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_1c}{E + m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_1z/\hbar}, \quad p_1c = \sqrt{E^2 - m_0^2c^4} \quad (3)$$

$$\psi_{II} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_2c}{V_0 - E - m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_2z/\hbar}, \quad p_2c = \sqrt{(V_0 - E)^2 - m_0^2c^4} \quad (4)$$

^{*8} F. Sauter: Z. Physik **73**, 547 (1931).

となる。

説明の核心となるのは、 $V_0 > E + m_0 c^2$ において運動量 p_2 が再び実数となり、領域 II で自由平面波が伝播できるようになるという事実である。これはディラック方程式の負エネルギー解に対応する第二のエネルギー連続体の存在によってのみ理解できる（下記参照）。入射波 (3) の一部は反射され（エネルギーおよび運動量保存を保ちながら）：

$$\psi_I^r = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -p_1 c \\ \frac{E + m_0 c^2}{0} \end{pmatrix} e^{-ip_1 z/\hbar} \quad (5)$$

残りは (4) として伝播する。 $z = 0$ においてポテンシャル内外の波動関数が等しいという条件（これは連続性とは異なる）を課す：

$$\psi_I(z=0) + \psi_I^r(z=0) = \psi_{II}(z=0) \quad (6)$$

これより各係数を決める方程式が得られる：^{*9}

$$A + C = B \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A - C &= -B \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{E + m_0 c^2}{V_0 - E - m_0 c^2} \\ &= -B \sqrt{\frac{(V_0 - E + m_0 c^2)(E + m_0 c^2)}{(V_0 - E - m_0 c^2)(E - m_0 c^2)}} \equiv -B\gamma \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{where } \gamma = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{E + m_0 c^2}{V_0 - E - m_0 c^2} = \sqrt{\frac{(V_0 - E + m_0 c^2)(E + m_0 c^2)}{(V_0 - E - m_0 c^2)(E - m_0 c^2)}}$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} (7) + (8) &\Rightarrow A = \frac{B}{2}(1 - \gamma) \\ (7) - (8) &\Rightarrow C = \frac{B}{2}(1 + \gamma) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \quad (9)$$

および

$$\frac{B}{A} = \frac{2}{1 - \gamma} \quad (10)$$

粒子カレント (particle current) すなわち「確率流束密度」の式は、

$$j(x) = c\psi^\dagger(x)\hat{\alpha}\psi(x) \quad \text{or} \quad j_k = c\psi^\dagger\hat{\alpha}_k\psi, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

^{*9} [訳註] このとき γ は最後の形から明らかに $\gamma > 1$ であることに注意する。

そして

$$\psi_I^{\dagger\hat{\alpha}_1} = A^* \left(0, \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, 1 \right) e^{-ip_1 z/\hbar} \quad (12)$$

$$\psi_I^{\dagger\hat{\alpha}_2} = A^* \left(0, -i \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, -i \right) e^{-ip_1 z/\hbar} \quad (13)$$

$$\psi_I^{\dagger\hat{\alpha}_3} = A^* \left(\frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, 1, 0 \right) e^{-ip_1 z/\hbar} \quad (14)$$

以上から次となる：

$$j_I = AA^* \frac{2p_1 c^2}{E + m_0 c^2} \mathbf{e}_z \quad (15)$$

これに対応して,

$$j_I^r = -CC^* \frac{2p_1 c^2}{E + m_0 c^2} \mathbf{e}_z \quad (16)$$

$$j_{II} = -BB^* \frac{2p_2 c^2}{V_0 - (E + m_0 c^2)} \mathbf{e}_z \quad (17)$$

従って、カレントの比は [式 (9) の γ は実数であるから]

$$\frac{|j_I^r|}{|j_I|} = \frac{(1 + \gamma)^2}{(1 - \gamma)^2}, \quad \frac{|j_{II}|}{|j_I|} = \frac{4}{(1 - \gamma)^2} |-\gamma| = \frac{4\gamma}{(1 - \gamma)^2} \quad (18)$$

式 (8) 及び $\gamma > 1$ であることから

$$|j_I^r| > |j_I| \quad (19)$$

この結果は「 j_{II} の流れが $(-z)$ 方向であること」すなわち「電子が領域 II から出て行くこと」に対応するが、われわれの仮定によれば領域 II には元々電子が存在しない。従って再解釈が必要であり、その過程で、以前に形式的に導かれた負のエネルギーの解が真剣に検討される。その結果、2つの電子連続体が存在することになる：

全電子が負エネルギー状態へ遷移するのを防ぐために、 $E < -m_0 c^2$ の全電子状態は電子で占有されていると要求しなければならない (第 12 章参照)。この仮説によって次の説明が可能になる：「 $V_0 > m_0 c^2 + E$ のポテンシャルは領域 II の電子エネルギーを十分に引き上げ、 $z > 0$ 側の負の連続体と $z < 0$ 側の正の連続体とが重なりを持つようになる。 $V_0 > m_0 c^2 + E$ の場合、ポテンシャル障壁を左から入射する電子は右側の真空から追加の電子を叩き出すことが出来て、その結果、ポテンシャル領域内で陽電子カレントが左から右へ流れる (すなわち負符号の $j_{II} < 0$ は陽電子カレント)」。

この考え方に基づけば、式 (4) で与えられる領域 II において、「陽電子波」(positron waves) と呼ばれる自由平面波の解が現れることが理解できる (以降の図 4 を参照)。さらに空孔理論によれば負の連続体の状態は占有されているから、(17) の j_{II} の負符号

は「領域 I に入射する電子が負の連続体から来ている」と考えることで理解できる。次の関係式はこのことに対応している：

$$j_I + j_I^r = j_I \left(1 - \frac{|C|^2}{|A|^2} \right) = j_I \frac{-4\gamma}{(1-\gamma)^2} = j_{II} < 0 \quad (20)$$

領域 II 内に残る空孔は陽電子として解釈されるから、以上の現象は別の言い方もできる：「上述の現象はポテンシャル障壁に於ける**電子・陽電子対生成**として理解できる（下図 4 参照）。これは、超臨界場 (supercritical fields) が存在する状況に於ける真空の崩壊 (decay of the vacuum) に関連している。^{*10}

【訳補足】 *****

(1) J.J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics の § 3.3 によれば、運動量 $\mathbf{p}$ が与えられた場合の規格化された平面波解は次である：

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{EV}} u^{(1 \text{ or } 2)}(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} - i \frac{Et}{\hbar} \right] \quad \text{for } E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4} > 0, \\ \psi &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{|E|V}} u^{(3 \text{ or } 4)}(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} + i \frac{|E|t}{\hbar} \right] \quad \text{for } E = -\sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4} < 0 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_1 + ip_2)}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix}, & u^{(2)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_1 - ip_2)}{E + m_0 c^2} \\ \frac{-cp_3}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix}, \\ u^{(3)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{|E| + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{pmatrix} \frac{-cp_3}{|E| + m_0 c^2} \\ \frac{-c(p_1 + ip_2)}{|E| + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u^{(4)}(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{|E| + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{pmatrix} \frac{-c(p_1 - ip_2)}{|E| + m_0 c^2} \\ \frac{|E| + m_0 c^2}{cp_3} \\ \frac{|E| + m_0 c^2}{|E| + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って、上向スピンを持った自由電子が z 方向に沿って運動量 $\mathbf{p}_1 = (0, 0, p_1)$ で入射する場合を考えると、領域 I ($z < 0$ の領域) に於ける入射波 ψ_{inc} と反射波 ψ_{ref} の正エネ

^{*10} これは次で議論されている： J. Reinhardt, W. Greiner: Rep. Prog. Phys. **40**, 219 (1977).
そして W. Greiner, W. Meuller, J. Rafeiski: *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer, Berlin, Heidelberg 1985) でより詳しく解説されている。

ルギー解は次のように書ける：

$$\begin{aligned}\psi_{inc} &= A u^{(1)}(\mathbf{p}_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_1 z/\hbar}, \\ \psi_{ref} &= C u^{(1)}(-\mathbf{p}_1) + C' u^{(2)}(-\mathbf{p}_1) \\ &= C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1 c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1 z/\hbar} + C' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-ip_1 z/\hbar}\end{aligned}$$

また透過波の場合では、一定な外場ポテンシャル $V_0 = e\Phi$ が存在するときの Dirac 方程式解が必要となる．従って、自由粒子解では $\frac{E}{c} = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_0^2 c^2}$ であるが、透過波の場合は $\frac{E - V_0}{c} = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_0^2 c^2}$ となる．従って領域 $\Pi(z > 0)$ の領域) では、そこでの運動量を $\mathbf{p}_2 = (0, 0, p_2)$ としして次式が成り立つべきである：

$$c^2 \mathbf{p}_2^2 = (E - V_0)^2 - m_0^2 c^4 = (E - V_0 - m_0 c^2)(E - V_0 + m_0 c^2)$$

よって正エネルギー $E > 0$ の透過波 ψ_{trans} は次のように書くことが出来る：

$$\begin{aligned}\psi_{trans} &= B u^{(1)}(\mathbf{p}_2) + B' u^{(2)}(\mathbf{p}_2) \\ &= B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_2 c}{E - V_0 + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_2 z/\hbar} + B' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_2 c}{E - V_0 + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{ip_2 z/\hbar}\end{aligned}$$

しかしながら、自由粒子に於いては「ヘリシティ」： $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ は保存される．従って、最初にスピンの x - y 平面上で上向きならば、粒子が反射または透過してもスピンはずっと上向きのままで、反転することはないから $C' = B' = 0$ とすべきである．よって、

$$\begin{aligned}\psi_{ref} &= C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1 c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1 z/\hbar}, \\ \psi_{trans} &= B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_2 c}{E - V_0 + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_2 z/\hbar}\end{aligned}$$

(2) 行列 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と β の Dirac-Pauli 表現は次であった：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

ただし Pauli 行列 σ_i は次である：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って, 確率流速密度 $j(x)$, 例えば j_I や j_I^r は次となる：

$$\begin{aligned} j_I = j_3 &= c\psi_I^\dagger \alpha_3 \psi_I = c\psi_I^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \psi_I \\ &= cA^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_1}{E+m_0c^2} & 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1z/\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_1}{E+m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_1z/\hbar} \\ &= c|A|^2 \left(\frac{cp_1}{E+m_0c^2} + \frac{cp_1}{E+m_0c^2} \right) = |A|^2 \frac{2c^2p_1}{E+m_0c^2} e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_I^r &= c\psi_{ref}^\dagger \alpha_3 \psi_{ref} \\ &= cC^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-p_1c}{E+m_0c^2} & 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1z/\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1c}{E+m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1z/\hbar} \\ &= |C|^2 \frac{-2c^2p_1}{E+m_0c^2} < 0 \end{aligned}$$

すると, カレントの比は

$$\frac{|j_I^r|}{|j_I|} = |C|^2 \left| \frac{-2c^2p_1}{E+m_0c^2} \right| \times \frac{1}{|A|^2} \left| \frac{E+m_0c^2}{2c^2p_1} \right| = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left| \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right|^2 = \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2}$$

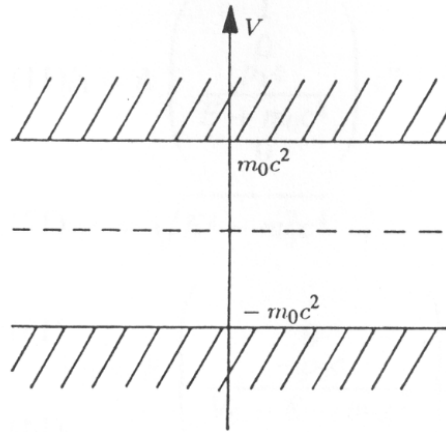


図3 自由ディラック方程式のエネルギー準位.

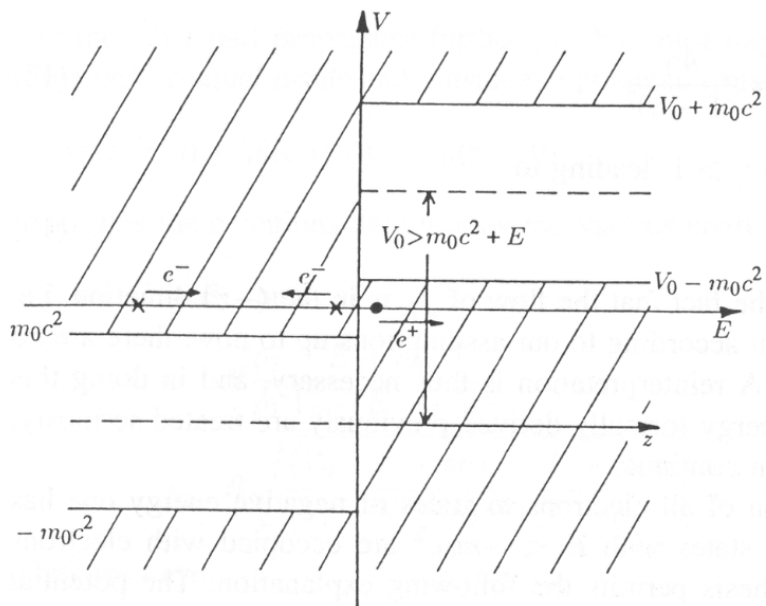


図4 ポテンシャル障壁におけるディラック方程式のエネルギー連続.